

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM
☆☆☆

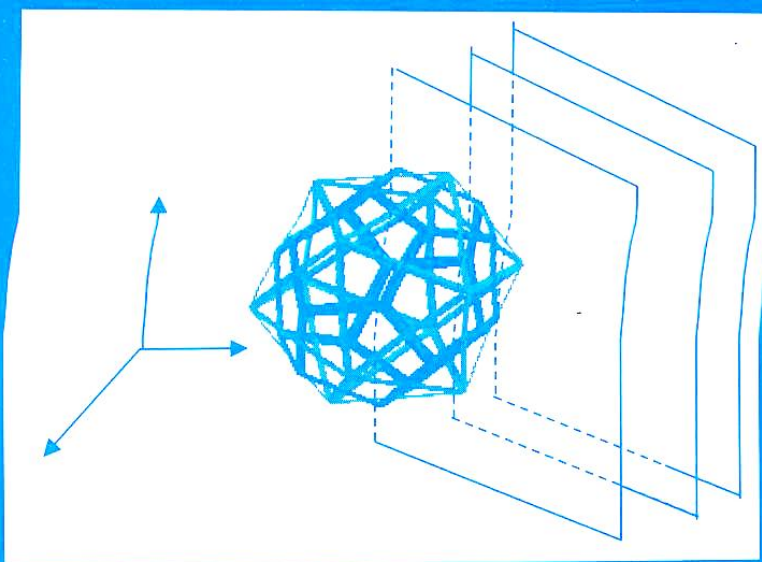
Biên soạn

TS. Nguyễn Phú Vinh (chủ biên)

Ths. Nguyễn Đình Tùng

GIÁO TRÌNH QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

(DÙNG CHO BẠC ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG)



$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x_i = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

Lưu hành nội bộ – 2010

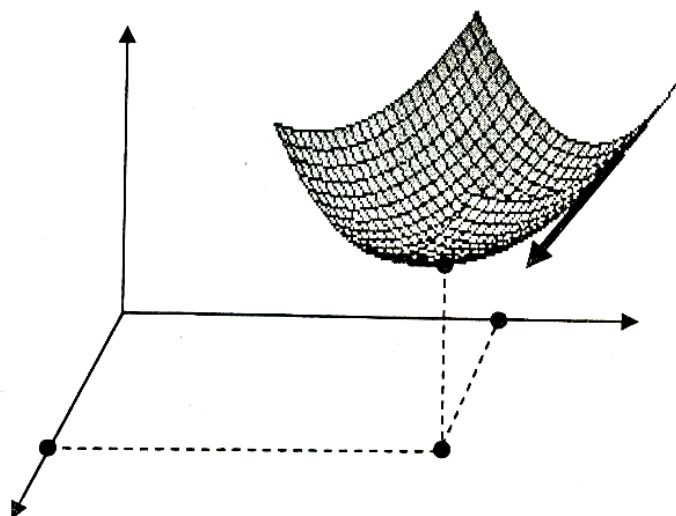
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

Biên soạn

TS. NGUYỄN PHÚ VINH (chủ biên)

Ths. Nguyễn Đình Tùng

GIÁO TRÌNH QUY HOẠCH TUYỂN TÍNH CHO BẬC ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG



Lưu hành nội bộ - 2010

LỜI NÓI ĐẦU

Qui hoạch tuyến tính (QHTT) được biên soạn dựa trên đề cương môn học cùng tên do Bộ Giáo Dục và Đào Tạo qui định bắt buộc cho sinh viên khối ngành kinh tế và kỹ thuật của Trường Đại học Công nghiệp Tp.HCM.

QHTT là một trong những môn học của lý thuyết tối ưu tổng quát. Nó bắt nguồn từ các bài toán kinh tế, và người có công đầu tiên phải kể đến là Dantzig, nhà toán học Mỹ. Sau đó QHTT được phát triển rất mạnh trên toàn thế giới, vì tính thực dụng của nó đối với ngành kinh tế quốc dân. Với những bài toán mà số biến khá lớn, người ta phải giải chúng trên những máy tính lớn và phải mất nhiều thời gian. Phát triển thuật toán này thành thuật toán mới của Khachian, nhà toán học Nga đã rút ngắn thời gian giải bài toán chỉ còn là đa thức thay vì là hàm mũ như của Dantzig. Hai nhà toán học lớn này, đã có công lớn trong lý thuyết tối ưu, không hẹn mà lại gặp nhau về đích cùng năm mất 2006. Kế tiếp là thuật toán điểm trong của nhà toán học Mỹ gốc Ấn Độ Karmaka, với thuật toán này Tác giả đã đi đến điểm tối ưu một cách nhanh chóng một cách thần kỳ.

Hầu hết bài tập trong sách này, đều được các tác giả tự thiết lập trên phần mềm, đưa dữ liệu vào dưới dạng text, rất dễ sửa chữa, Do Khoa KHCB tự thiết kế, các thao tác tính toán trên đối tượng của phần là phân số như chúng ta vẫn thường làm bằng thủ công. Và bảng output kết xuất được trình bày từng bước kết quả của thuật toán đơn hình. Nên trong sách có số lượng nhiều bài tập và tất cả lời giải của chúng đã được kiểm chứng trên phần mềm này, và như thế độ chính xác có thể đáng tin cậy.

Tập thể tác giả cũng xin bày tỏ lòng cảm chân thành đến Ban Giám Hiệu trường Đại học Công Nghiệp Tp.HCM, đặc biệt **Tiến Sĩ. Hiệu Trưởng Tạ Xuân Tề**, Ngài đã động viên giúp đỡ để giáo trình này kịp ra mắt phục vụ sinh viên và thầy giáo.

Mặc dù các tác giả đã rất cố gắng nhưng chắc hẳn không tránh khỏi thiếu sót. Những ý kiến đóng góp về nội dung và hình thức của tập sách sẽ được tiếp thu với lòng biết ơn sâu sắc, xin gửi về TS. Nguyễn Phú Vinh, Khoa Cơ Bản, Trường Đại học Công nghiệp Tp.HCM.

Tp.HCM, ngày 01 tháng 04 năm 2009

Thay mặt các tác giả

Tiến Sĩ: Nguyễn Phú Vinh

MỤC LỤC

Mục lục	4
Chương 1, Phần 1: Một số bài toán dẫn đến bài toán QHTT.....	5
Chương 1, Phần 2: Bài toán QHTT và ý nghĩa hình học.....	17
Chương 1, Phần 3: T/c tập phương án tối ưu của bài toán QHTT.....	26
Chương 1, Phần 4: Phương pháp đơn hình.....	40
Chương 2, Phần 1: Bài toán đối ngẫu, một số tính chất.....	74
Chương 2: Bài tập.....	95
Chương 2: Một số thuận tiện và ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu.....	112
Chương 3: Bài toán vận tải.....	123
Chương 3: Bài toán vận tải.....	148
Chương 4: Bài toán sản xuất đồng bộ.....	159
Tài liệu tham khảo	171

§1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Quy hoạch tuyến tính là môn học được sinh ra từ nhu cầu giải các bài toán về kế hoạch sản xuất, phân phối, sao cho có lợi ích về mặt kinh tế nhiều nhất. Chúng ta lần lượt xét một trong số các bài toán này thông qua các ví dụ.

1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất để có doanh thu (hay lãi) lớn nhất.

Ví dụ 1: Một xí nghiệp dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng các nguyên liệu I, II, và III mà xí nghiệp có là 8, 21, 10. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B được cho ở bảng sau đây.

NL \ SP	I	II	III
A	3	0	5
B	2	6	0

(Nghĩa là khi sản xuất một đơn vị sản phẩm loại A cần 3 đơn vị nguyên liệu I, không cần nguyên liệu loại II, cần 5 đơn vị nguyên liệu loại III. Khi sản xuất một đơn vị sản phẩm loại B cần 2 đơn vị nguyên liệu I, 6 đơn vị nguyên liệu loại II, không cần nguyên liệu loại III).

Cần lập một kế hoạch sản xuất, (tức là tính xem nên sản xuất bao nhiêu đơn vị sản phẩm từng loại) để lãi thu được là nhiều nhất. Biết sản phẩm A lãi 4 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm, sản phẩm B lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm.

Lập bài toán: Gọi x_1, x_2 theo thứ tự là số lượng sản phẩm A, B mà xí nghiệp sản xuất. Khi đó xí nghiệp sẽ sản xuất mức sản lượng x_1, x_2 sao cho biểu thức $f = 4x_1 + 5x_2$ lớn nhất.

Số lượng nguyên liệu loại I phải dùng là $3x_1 + 2x_2$.

Số lượng nguyên liệu loại II phải dùng là $6x_2$.

Số lượng nguyên liệu loại III phải dùng là $5x_1$.

Do các nguyên liệu I, II, III là có hạn nên ta có:

$3x_1 + 2x_2 \leq 8$ (ràng buộc về nguyên liệu I).

$6x_2 \leq 21$ (ràng buộc về nguyên liệu II).

$5x_1 \leq 10$ (ràng buộc về nguyên liệu III).

Ngoài ra do x_1, x_2 là mức sản lượng nên $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Bằng ngôn ngữ toán học, bài toán trên có thể phát biểu lại như sau :

Tìm x_1, x_2 sao cho biểu thức $f = 4x_1 + 5x_2$ lớn nhất với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 6x_2 \leq 21 \\ 5x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất một tấn sơn ngoài trời cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn, nhu cầu cực đại của sơn nội thất là 2 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 2000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD.

Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có doanh thu lớn nhất ?

Lập bài toán: Gọi x_1, x_2 (đơn vị tính là tấn) theo thứ tự là số lượng sơn nội thất và sơn ngoài trời mà công ty sản xuất. Khi đó công ty sẽ sản xuất số lượng x_1, x_2 sao cho biểu thức $f = 2x_1 + 3x_2$ lớn nhất. (2 là 2000 USD, 3 là 3000 USD)

Do các nguyên liệu A, B là có hạn nên x_1, x_2 sẽ bị ràng buộc bởi các điều kiện sau

$2x_1 + x_2 \leq 6$ (ràng buộc về nguyên liệu A).

$x_1 + 2x_2 \leq 8$ (ràng buộc về nguyên liệu B).

$x_1 - x_2 \leq 1$ (ràng buộc về nhu cầu thị trường).

$x_1 \leq 2$ (ràng buộc về nhu cầu thị trường).

Ngoài ra do x_1, x_2 là mức sản lượng nên $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Bằng ngôn ngữ toán học, bài toán trên có thể phát biểu lại như sau :

Tìm x_1, x_2 sao cho biểu thức $f = 2x_1 + 3x_2$ lớn nhất với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Hai bài toán trên đều có một ý chung là : Công ty sản xuất hai loại sản phẩm, hai loại sản phẩm này được dùng từ hai hay ba nguyên liệu có giới hạn nào đó. Các sản phẩm này đã biết giá bán hay bán lãi bao nhiêu tiền. Bài toán đặt ra là cần sản xuất các sản phẩm này với mức sản lượng là bao nhiêu để có lãi hay doanh thu lớn nhất.

Bài toán trong ví dụ 2 các ràng buộc $x_1 - x_2 \leq 1$ và $x_1 \leq 2$ là những ràng buộc phát sinh. Các sản phẩm khi sản xuất ra ta đều giả thiết là bán hết.

Tóm lại, nếu bỏ qua các ràng buộc phát sinh thì hai bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau:

Một Công ty cần sản xuất n sản phẩm $SP1, SP2, \dots, SPn$. Để sản xuất các sản phẩm này cần m nguyên liệu $NL1, NL2, \dots, NLm$. Biết:

a_{ij} là lượng nguyên liệu loại i cần thiết dùng để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j .

b_i là trữ lượng nguyên liệu loại i .

c_j là tiền lãi có được từ việc bán một đơn vị sản phẩm loại j .

Bài toán đặt ra, hãy xây dựng một kế hoạch sản xuất cho Công ty để có lợi nhuận nhiều nhất.

Có thể tóm tắt bài toán này trong một bảng ma trận

SP_j NLi	$SP1$ c_1	$SP2$ c_2	$\dots$	SPn c_n
$NL1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$NL2$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
NLm	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Lời giải cho bài toán tổng quát là:

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là số đơn vị sản lượng các sản phẩm $SP1, SP2, \dots, SPn$ mà Công ty sản xuất. Khi đó tiền lãi mà Công ty có được từ việc bán các sản phẩm trên là $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$. Các nguyên liệu là có hạn, nên ta có

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$$

2. Bài toán khẩu phần thức ăn:

Có n loại thực phẩm $TP_1, TP_2, \dots, TP_n$. Giá tiền của một đơn vị khối lượng các loại thực phẩm này lần lượt là $c_1, c_2, \dots, c_n$. Trong n loại thực phẩm này có chứa m chất dinh dưỡng $DD_1, DD_2, \dots, DD_m$. Lượng chất dinh dưỡng loại i có trong một đơn vị khối lượng thực phẩm loại j là a_{ij} . Lượng chất dinh dưỡng loại i tối thiểu cần thiết cho một khẩu phần ăn là b_i .

Bài toán đặt ra là: Xây dựng một khẩu phần ăn đảm bảo được yêu cầu về m loại chất dinh dưỡng, với giá rẻ nhất.

Lập bài toán: Gọi x_j là lượng thực phẩm loại j có trong khẩu phần.

Khi đó:

Giá tiền phải trả cho khẩu phần này là $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Lượng chất dinh dưỡng loại i có trong khẩu phần này là: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Từ đây ta có bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

với điều kiện:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{1, n}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

Thông thường bài toán này còn thêm ràng buộc về khối lượng khẩu phần thức ăn không vượt quá một lượng nào đó, tức là :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq M.$$

3. Bài toán vốn đầu tư nhỏ nhất:

Ví dụ 1: Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý ba loại giấy A, B, C. Do ba phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 1 tạ giấy loại B, 3 tạ giấy loại C. Trong khi đó phân xưởng II xử lý được 2 tạ giấy loại A, 7 tạ giấy loại B, 1 tạ giấy loại C. Phân xưởng III xử lý được 1 tạ giấy loại A, 3 tạ giấy loại B, 8 tạ giấy loại C. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 2 tấn giấy loại A, 2.5 tấn giấy loại B, 3 tấn giấy loại C. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp thỏa: hoàn thành công việc và giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

Lập bài toán: Gọi x_1, x_2, x_3 (đơn vị 10 triệu đồng) lần lượt là số tiền đầu tư vào các phân xưởng I, II, III. Khi đó số tiền mà Xí nghiệp đầu tư là $f = x_1 + x_2 + x_3$.

Theo đề bài: phân xưởng I xử lý được $6x_1$ tạ giấy loại A, x_1 tạ giấy loại B, $3x_1$ tạ giấy loại C.

Phân xưởng II xử lý được $2x_2$ tạ giấy loại A, $7x_2$ tạ giấy loại B, x_2 tạ giấy loại C.

Phân xưởng III xử lý được x_3 tạ giấy loại A, $3x_3$ tạ giấy loại B, $8x_3$ tạ giấy loại C.

Theo yêu cầu lao động Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 2 tấn giấy loại A nên $6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$ và ít nhất 2.5 tấn giấy loại B, 3 tấn giấy loại C nên $x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25$ và $3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30$.

Vậy ta có bài toán: tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = x_1 + x_2 + x_3$ với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Ví dụ 2: Có ba xí nghiệp may I, II, III cùng có thể sản xuất áo vét và quần. Nếu đầu tư 1000 USD vào XN I thì cuối kỳ sẽ cho 35 áo vét và 45 quần. Nếu đầu tư 1000 USD vào XN II thì cuối kỳ sẽ cho 40 áo vét và 42 quần. Nếu đầu tư 1000 USD vào XN III thì cuối kỳ sẽ cho 43 áo vét và 30 quần. Lượng vải và số giờ công để sản xuất một áo hoặc một quần cho ở bảng sau.

XN \ SP	I	II	III
Áo vét	3.5 m 20 giờ	4 m 16 giờ	3.8 m 18 giờ
Quần	2.8 m 10 giờ	2.6 m 12 giờ	2.5 m 15 giờ

Tổng số vải và giờ công mà công ty có thể có là 10 000m vải và 52 000 giờ công lao động.

Theo hợp đồng thì cuối kỳ phải có tối thiểu 1500 bộ quần áo, nếu lẻ bộ thì quần để bán hơn.

Hãy lập một kế hoạch đầu tư vào mỗi Xí nghiệp bao nhiêu vốn để:

1. Hoàn thành kế hoạch sản phẩm.
2. Không khó khăn về tiêu thụ.
3. Không thiếu vải và giờ công lao động.
4. Tổng số vốn đầu tư nhỏ nhất.

Lập bài toán: Giả sử x_j (đơn vị là 1000 USD) là số vốn đầu tư vào các XN I, II, III.

Số áo vét thu được ở ba XN là $35x_1 + 40x_2 + 43x_3$.

Số quần thu được ở ba XN là $45x_1 + 42x_2 + 30x_3$.

Tổng số vải cần để may áo vét là

$$3.5m \times 35x_1 + 4m \times 40x_2 + 3.8m \times 43x_3.$$

Tổng số vải cần để may quần là

$$2.8m \times 45x_1 + 2.6m \times 42x_2 + 2.5m \times 30x_3$$

Tổng số vải mà XN phải dùng là

$$\begin{aligned} & 3.5m \times 35x_1 + 4m \times 40x_2 + 3.8m \times 43x_3 + \\ & + 2.8m \times 45x_1 + 2.6m \times 42x_2 + 2.5m \times 30x_3 = \\ & = 248.5x_1 + 269.2x_2 + 238.4x_3 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Tương tự như trên tổng số giờ công lao động mà XN phải dùng là

$$\begin{aligned} & 20 \times 35x_1 + 16 \times 40x_2 + 18 \times 43x_3 + \\ & 10 \times 45x_1 + 12 \times 42x_2 + 15 \times 30x_3 = \\ & = 1150x_1 + 1144x_2 + 1224x_3 \end{aligned}$$

Ta có bài toán như sau

$$\begin{aligned} & \min(x_1 + x_2 + x_3) \\ & \begin{cases} 248.5x_1 + 269.2x_2 + 238.4x_3 \leq 10\,000 & (1) \\ 1150x_1 + 1144x_2 + 1224x_3 \leq 52\,000 & (2) \\ 45x_1 + 42x_2 + 30x_3 \geq 35x_1 + 40x_2 + 43x_3 & (3) \\ 35x_1 + 40x_2 + 43x_3 \geq 1\,500 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Có thể viết lại bài toán trên như sau

$$\begin{aligned} & f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} 248.5x_1 + 269.2x_2 + 238.4x_3 \leq 10\,000 & (1) \\ 1150x_1 + 1144x_2 + 1224x_3 \leq 52\,000 & (2) \\ 10x_1 + 2x_2 - 13x_3 \geq 0 & (3) \\ 35x_1 + 40x_2 + 43x_3 \geq 1\,500 & (4) \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, 2, 3 & (5) \end{cases} \end{aligned}$$

4. Bài toán vận tải:

Ví dụ : Có một loại hàng cần được chuyên chở từ hai kho (trạm phát P1 và P2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thụ) T1, T2, T3 . Lượng hàng có ở hai kho và lượng hàng cần ở ba nơi tiêu thụ cũng như số tiền vận chuyển một đơn vị hàng từ mỗi kho đến các nơi tiêu thụ được cho ở bảng sau.

	T1 35 tấn hàng	T2 25 tấn hàng	T3 45 tấn hàng
P1 30 tấn hàng	5	2	3
P2 75 tấn hàng	2	1	1

(Chẳng hạn từ kho P1 vận chuyển một tấn hàng đến nơi tiêu thụ T3 mất 3 đơn vị tiền tệ, từ kho P2 vận chuyển đến nơi tiêu thụ T1 mất 2 đơn vị tiền tệ...)

Bài toán đặt ra là, hãy tìm một phương án vận chuyển thỏa yêu cầu về thu phát sao cho chi phí vận chuyển bé nhất.

Gọi x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ kho P_i đến nơi nhận T_j . Ta có ma trận chi phí vận chuyển là

$$\begin{pmatrix} 5x_{11} & 2x_{12} & 3x_{13} \\ 2x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Tổng chi phí : $f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23}$

Ma trận phương án vận chuyển

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Vì tổng lượng hàng ở các kho và tổng lượng hàng ở các nơi tiêu thụ là bằng nhau nên ta có các ràng buộc:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75$$

$$x_{11} + x_{21} = 35$$

$$x_{12} + x_{22} = 25$$

$$x_{13} + x_{23} = 45$$

Tóm lại ta có bài toán

$$f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Đây là một bài toán vận tải, mà tổng số lượng hàng hoá ở các kho bằng tổng số lượng hàng hoá ở các nơi tiêu thụ. Tuyến đường vận chuyển từ kho P_i đến nơi nhận T_j là ta biết giá tiền và không bị ngăn cấm. Bài toán vận tải như vậy được gọi là bài toán vận tải cân bằng thu phát và không có ô cấm.

Bài tập. (Phần này chỉ cần lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính)

1. Một công ty sản xuất hai loại thực phẩm A, B. Nguyên liệu để sản xuất gồm ba loại Bột, Đường, Dầu thực vật, với trữ lượng tương ứng là 30 tấn, 18 tấn, 6 tấn. Để sản xuất 1 tấn thực phẩm loại A cần 0.8 tấn Bột, 0.5 tấn Đường, 0.2 tấn Dầu thực vật. Để sản xuất 1 tấn thực phẩm loại B cần 0.7 tấn Bột, 0.4 tấn Đường, 0.3 tấn Dầu thực vật. Qua khảo sát sở thích người tiêu dùng công ty biết rằng nhu cầu về thực phẩm A không hơn thực phẩm B quá 2 tấn. Giá bán một tấn thực phẩm A là 4000 USD, giá bán một tấn thực phẩm B là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn thực phẩm A phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn thực phẩm B phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD.

Hỏi cần sản xuất mỗi loại thực phẩm bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

2. Một xí nghiệp dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 10, 12, 15. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B được cho ở bảng sau đây

NL \ SP	I	II	III
A	1	2	1
B	2	1	3

Qua tìm hiểu thị trường xí nghiệp biết tổng số cả hai sản phẩm A, B mà thị trường cần không quá 13 tấn.

Xí nghiệp muốn lên một kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 4 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B.

Lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính.

3. Một máy bay có tải trọng M . Có n loại hàng để xếp lên máy bay đó. Một đơn vị loại hàng j có trọng lượng a_j và giá b_j ($j = \overline{1, n}$). Cần xếp lên máy bay mỗi loại hàng bao nhiêu đơn vị để trọng lượng tổng cộng không vượt quá M và có tổng giá trị vận chuyển lớn nhất?

Hãy thiết lập bài toán Quy hoạch tuyến tính tương ứng.

4. Một nhà máy cần phân công cho m phân xưởng của mình sản xuất một loại máy có n chi tiết khác nhau, trong đó mỗi máy cần có đúng k_j chi tiết loại j . Gọi a_{ij} là số chi tiết j mà phân xưởng i sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Hãy lập kế hoạch xác định số đơn vị thời gian cần dành cho phân xưởng i làm chi tiết j để tổng số máy sản xuất được lớn nhất.

5. Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II và III. Số lượng các nguyên liệu I, II và III mà xí nghiệp có lần lượt là 15, 12, 18. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B và được cho ở bảng sau đây

SP \ NL	I	II	III
A	1	2	1
B	2	1	3
C	0	2	5

Qua tìm hiểu thị trường xí nghiệp biết cả ba sản phẩm A, B và C mà thị trường cần ít nhất là 2 đơn vị cho mỗi sản phẩm.

Xí nghiệp muốn lên một kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết các sản phẩm làm ra đều bán hết), nếu biết rằng lãi 7 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B, lãi 10 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại C.

Lập mô hình bài toán Quy hoạch tuyến tính.

6. Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án sản xuất để làm cực đại lợi nhuận. Hãy phát biểu bài toán Quy hoạch tuyến tính.

Lời giải hoặc hướng dẫn.

1. Gọi x_1, x_2 (đơn vị tấn) theo thứ tự là số lượng các loại thực phẩm A, B mà Công ty sản xuất. Số lượng Bột dùng hết là $0.8x_1 + 0.7x_2$. Số lượng Đường dùng hết là $0.5x_1 + 0.4x_2$. Số lượng Dầu thực vật dùng hết là $0.2x_1 + 0.3x_2$.

Doanh thu của Công ty sẽ là: $4000x_1 + 3000x_2$.

Chi phí của Công ty sẽ là: $1300x_1 + 1000x_2$.

Lợi nhuận của Công ty sẽ là:

$$(4000x_1 + 3000x_2) - (1300x_1 + 1000x_2) = 2700x_1 + 2000x_2.$$

Theo đề bài ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính:

$$f = 2700x_1 + 2000x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 0.7x_2 \leq 30 \\ 0.5x_1 + 0.4x_2 \leq 18 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leq 6 \end{cases} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

2. Gọi x_1, x_2 là số đơn vị các sản phẩm A, B mà Xí nghiệp sản xuất. Ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. Gọi x_j là số lượng hàng loại j xếp lên máy bay.

Khi đó trọng lượng của tất cả các loại hàng hoá sẽ xếp lên máy

bay là $\sum_{j=1}^n a_j x_j$. Tổng này không được vượt quá M .

Giá tiền vận chuyển là $\sum_{j=1}^n b_j x_j$. Ta muốn giá thành này là cao

nhất. Ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = \sum_{j=1}^n b_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq M$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$$

5. Gọi x_1, x_2, x_3 là số đơn vị các sản phẩm A, B và C mà Xí nghiệp sản xuất. Ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = 7x_1 + 5x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 18 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6. Có thể viết lại bài toán như sau.

	Tươi 440 (tấn)	Nấu chín 420(tấn)	Nấu chín ngoài giờ 250 (tấn)
Bò (480)	8	11	14
Lợn (400)	4	7	12
Cừu (230)	4	9	13

Đây là một dạng của bài toán vận tải, nhưng ta tìm phương án để có “cước phí” vận chuyển lớn nhất.

Ký hiệu x_{ij} , $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$ theo thứ tự là lượng thịt Bò, Lợn, Cừu dưới dạng Tươi, Nấu chín, Nấu chín ngoài giờ mà nhà máy sẽ sản xuất trong ngày. Ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = 8x_{11} + 11x_{12} + 14x_{13} + 4x_{21} + 7x_{22} + 12x_{23} \\ 4x_{31} + 9x_{32} + 13x_{33} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 480 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 230 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 440 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 420 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 250 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

§2. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH VÀ Ý NGHĨA HÌNH HỌC

1. Dạng tổng quát của bài toán Quy hoạch tuyến tính.

Bài toán Quy hoạch tuyến tính tổng quát có dạng sau đây

Tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ với các ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i; i \in I_1 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i; i \in I_2 \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i; i \in I_3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j \in J_1, x_j \leq 0; j \in J_2, x_j \in \mathbb{R}; j \in J_3.$$

Trong đó I_1, I_2, I_3 rời nhau và $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$, J_1, J_2, J_3 rời nhau và $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Có thể viết lại bài toán tổng quát trên như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \max (\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_1) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I_2) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I_3) \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J_1) \quad (4)$$

$$x_j \leq 0 \quad (j \in J_2) \quad (5)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad (j \in J_3) \quad (6)$$

Ví dụ: Xét bài toán

$$f(x) = 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_3 - 4x_4 \leq -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 17 \end{cases}$$

$$x_1; x_3 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_4 \leq 0.$$

Đây là bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát, trong đó $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{3\}$, $I_3 = \{4\}$, $J_1 = \{1, 3\}$, $J_2 = \{4\}$, $J_3 = \{2\}$.

2. Một số khái niệm của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

2.1. Hàm mục tiêu: Hàm $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle$ được gọi là hàm mục tiêu.

2.2. Phương án: Véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa tất cả các ràng buộc (1), (2), (3), (4), (5), (6) gọi là một phương án.

Tập hợp tất cả các véc tơ x thỏa tất cả các ràng buộc (1), (2), (3), (4), (5), (6) gọi là *tập phương án*.

2.3. Phương án tối ưu: Phương án x làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất (nếu là bài toán max) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu là bài toán min) được gọi là phương án tối ưu.

3. Dạng chính tắc của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

Bài toán Quy hoạch tuyến tính có dạng sau đây gọi là dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \max (\min)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Hay có thể viết lại

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \max (\min)$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Trong đó $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, m \\ j=1, n}}$ là một ma trận cấp $m \times n$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$. Viết $x \geq 0$, nghĩa là $x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}$.

Ký hiệu $A^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ là véc tơ cột thứ j của ma trận A . Khi đó phương trình $Ax = b$ được viết lại dưới dạng:

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b.$$

Chú ý: Nếu là vectơ, trong giáo trình này không phân biệt vectơ dòng hay vectơ cột. Tuy nhiên trong từng trường hợp cụ thể ta không thể nhầm lẫn. Điều này không có gì khó khăn.

Nhận xét: Mọi bài toán Quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về dạng chính

tắc. Thật vậy, nếu gặp bất đẳng thức $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$, ta viết lại

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i; x_{n+1} \geq 0. \text{ Nếu gặp bất đẳng thức}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \text{ ta viết lại } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i; x_{n+1} \geq 0.$$

Nếu $x_j \leq 0$, ta thay $x_j = -y_j$; $y_j \geq 0$. Nếu $x_j \in \mathbb{R}$, ta thay $x_j = y_{j1} - y_{j2}$, $y_{j1}; y_{j2} \geq 0$.

4. Ý nghĩa hình học và phương pháp đồ thị:

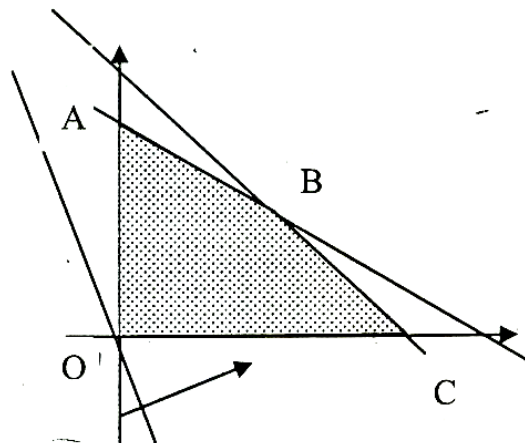
Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0.$$

Ta biểu diễn tập phương án trên mặt phẳng xOy , đó chính là tứ giác OABC, với $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(3;2)$, $C(5;0)$. Hàm mục tiêu $f(x) = 4x_1 + x_2$, với mỗi một giá trị $f = f_0$ cố định, ta có $f_0 = 4x_1 + x_2$ là một đường thẳng (d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;1)$.



Khi cho f thay đổi ta có họ đường thẳng song song. Vẽ đường thẳng (d) đi qua một điểm nào đó của tập phương án, chẳng hạn $O(0;0)$, đường thẳng (d) lúc đó là $4x_1 + x_2 = 0$.

Tịnh tiến đường thẳng (d) theo một hướng nào đó sẽ làm cho giá trị hàm mục tiêu tăng, ngược lại sẽ làm hàm mục tiêu giảm. Ở bài toán này ta cần làm cho hàm mục tiêu tăng. Rõ ràng đi theo hướng mũi tên sẽ làm cho hàm mục tiêu tăng.

Nhận thấy: $f(O) = f(0;0) = 0$; $f(A) = f(0;4) = 4$; $f(B) = f(3;2) = 14$; $f(C) = f(5;0) = 20$. Hàm mục tiêu đạt giá trị max là 20 tại điểm $C(5;0)$.

Trong trường hợp tập phương án không rỗng và không bị chặn, hàm mục tiêu có thể nhận những giá trị nhỏ, hay lớn tùy ý trên tập phương án. Lúc đó bài toán không có phương án tối ưu.

Bài tập.

1. Đưa các bài toán sau đây về dạng chính tắc

a) $f(x) = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \\ x_1 - 2x_2 = 13 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

b) $f(x) = x_1 + 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 \geq 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3; x_4 \in \mathbb{R}$$

c) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_5 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1; x_5 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3; x_4 \in \mathbb{R}$$

2. Biểu diễn trên mặt phẳng xOy tập phương án của các bài toán sau

a) $f(x) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq -7 \end{cases}$$

$$x_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, 2}$$

b) $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}$$

3. Biểu diễn trong không gian 0xyz tập phương án của các bài toán sau

a) $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{6} \leq 1$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$$

b) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$$

4. Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}$$

a) Hãy chỉ một phương án của bài toán.

b) Rõ ràng tập phương án là tập các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (I). Hãy chỉ rõ tập phương án của bài toán.

5. Bằng phương pháp hình học, giải các bài toán sau

a) $f(x) = -4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}$$

b) $f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}$$

c) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

Lời giải hoặc hướng dẫn

1) a) $f(x) = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 + x_6 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 - 2x_2 = 13 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}$$

b) $f(x) = x_1 - 5x'_2 - 3x'_3 + 3x''_3 \rightarrow \max$

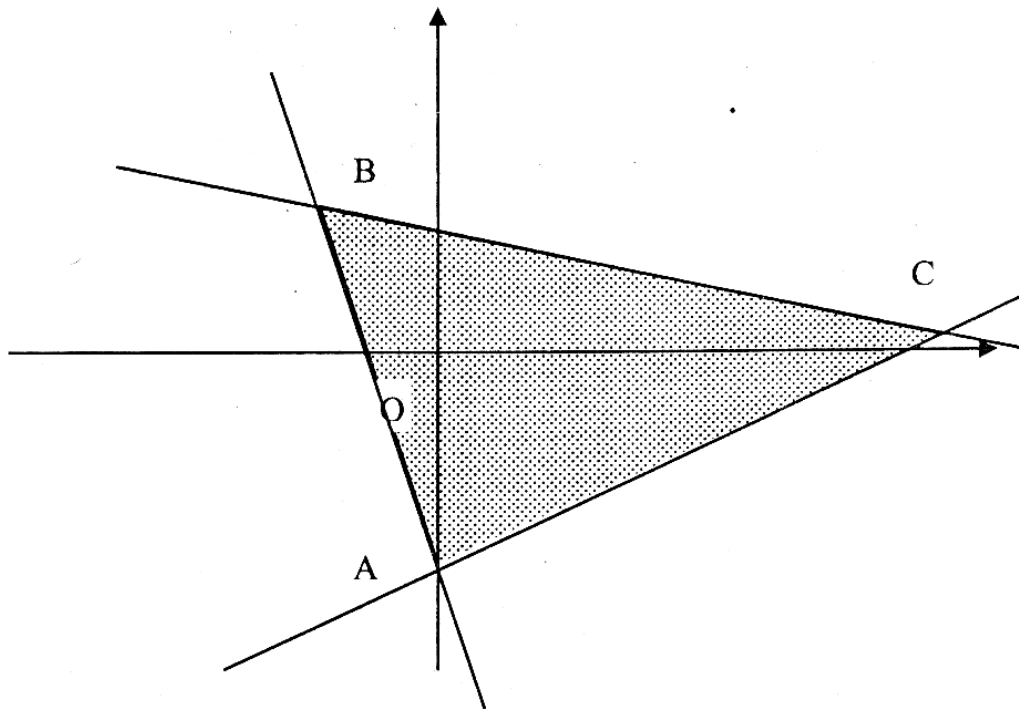
$$\begin{cases} x_1 + 2x'_2 + x_4 - x_5 = 7 \\ x_1 - 5x'_2 + x'_3 - x''_3 + x'_4 - x''_4 = 9 \\ x_1 + 2x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_6 = 6 \\ x_1 + 2x'_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x', x'_3, x''_3, x'_4, x''_4 \geq 0$$

2) a) Tương tự như ví dụ trong phần lý thuyết.

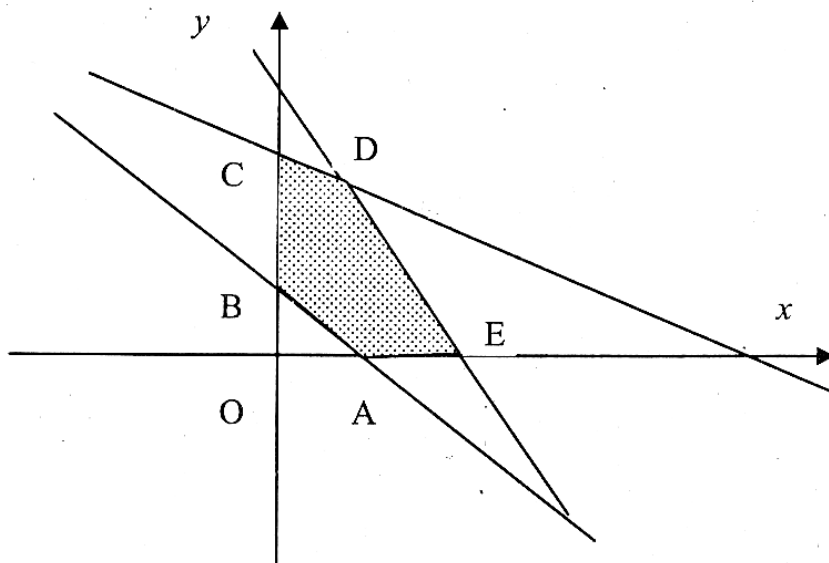
Tập phương án là phần trong của tam giác ABC. Trong đó $A\left(\frac{-7}{2}, 0\right)$,

$B\left(\frac{-53}{33}, \frac{70}{33}\right)$, $C\left(\frac{53}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

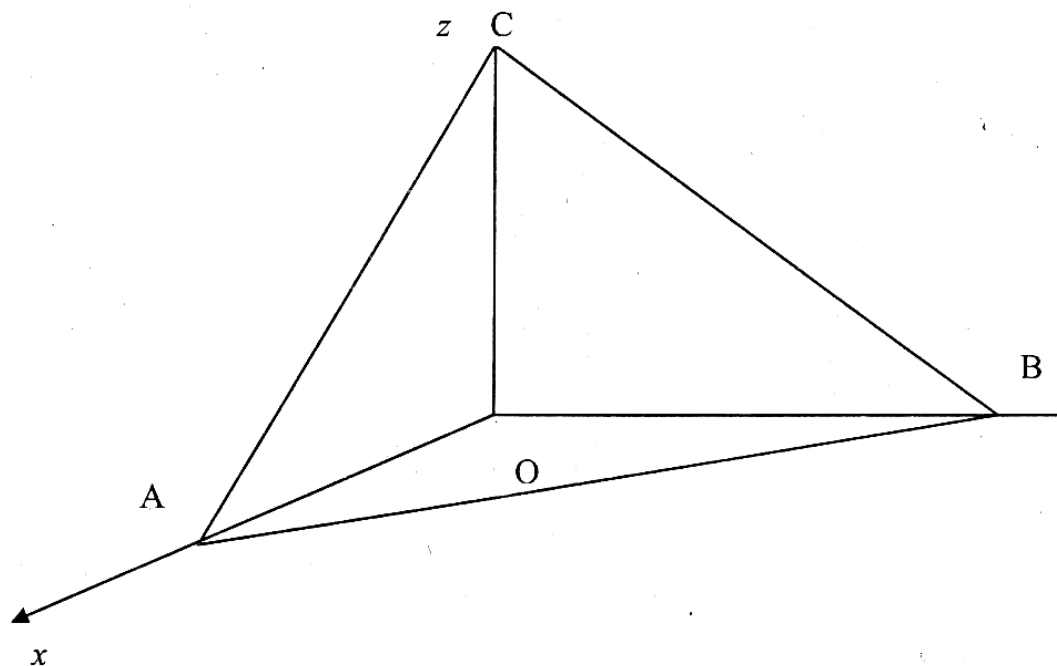


b) Tương tự như ví dụ. Tập phương án là phần trong của ngũ giác ABCDE, phân gạch chéo.

Với $A(1,0)$; $B(0,1)$; $C(0,9/4)$; $D(3/4,15/8)$; $E(2,0)$.



3) a) Tập phương án là phần trong hình chóp OABC, trong đó $O(0;0;0)$, $A(4;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;6)$.



b) Tập phương án là hình hộp xiên.

4. a) Dùng phép biến đổi sơ cấp ta giải hệ phương trình tuyến tính đã cho.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$$

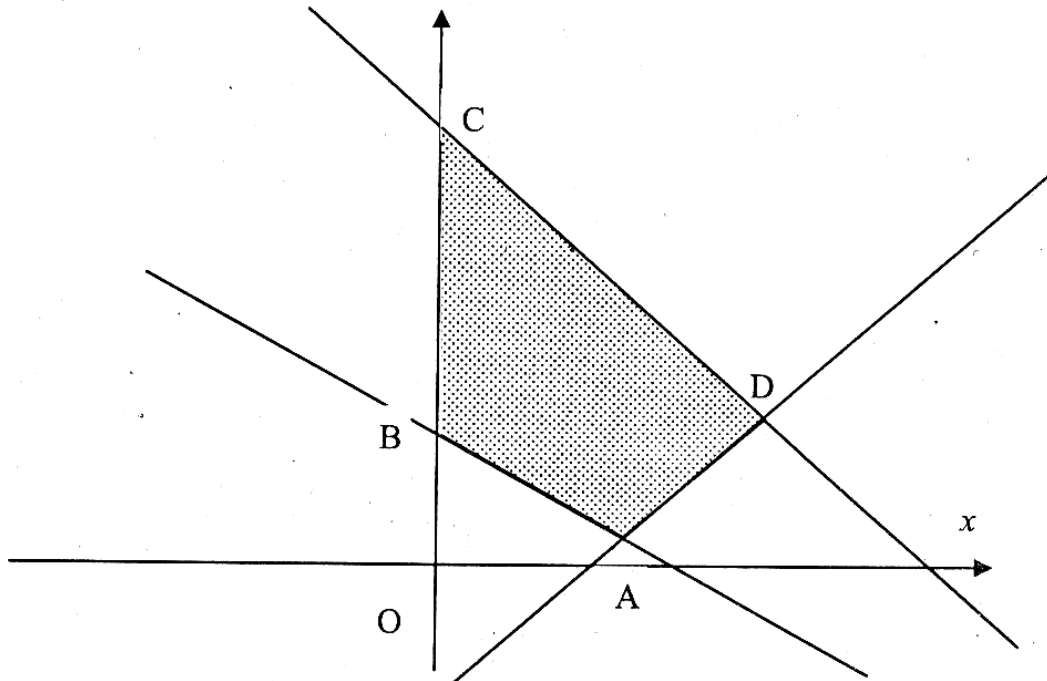
Ta có thể chọn một nghiệm như sau $x=(2,0,2,0)$. Đây là một phương án của bài toán.

b) Tập phương án của bài toán là:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{2\alpha}{3} \\ x_2 = \frac{-\alpha}{3} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$

Vì theo giả thiết $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}; x_4 \in \mathbb{R}$ cho nên $\alpha \leq 0$.

5.



a) Tập phương án là phần trong của ngũ giác ABCD, phần tô đậm. Với $A(12/5, 2/5); B(0, 2); C(0, 6); D(4, 2)$.

Vẽ đường thẳng $f = -4x_1 + 3x_2$ đi qua một điểm của tập phương án. Khi cho f thay đổi sẽ làm cho giá trị hàm mục tiêu tăng hay giảm. Ở bài toán này ta cần làm cho hàm mục tiêu giảm. Từ đó giá trị min của f là :

$$f(A) = -42/5.$$

§3. TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1. Tập hợp lồi.

1.1. Định nghĩa 1 (Định nghĩa tổ hợp lồi): Giả sử $x^1, x^2, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$.

Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là tổ hợp lồi của các điểm $x^1, x^2, \dots, x^m$ nếu tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ sao cho:

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_m x^m.$$

Một tổ hợp lồi của hai điểm được gọi đoạn thẳng nối hai điểm đó.

$$[x^1, x^2] = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Ví dụ 1: Trong $\mathbb{R}$, cho $x^1 = 1, x^2 = 4$. Điểm $x=3$ là tổ hợp lồi của hai điểm

$$x^1 = 1, x^2 = 4. \text{ Thật vậy, } 3 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 4, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \geq 0; \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Ví dụ 2: Trong $\mathbb{R}^2$, cho tam giác ABC, với A(1,1); B(1,2); C(3,4). Khi đó trọng tâm G là tổ hợp lồi của các đỉnh A, B, C.

$$\text{Trọng tâm } G(5/3, 7/3). \text{ Ta có } \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,1) + \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(3,4)$$

$$\text{và } \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \geq 0; \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

1.2. Định nghĩa 2 (Định nghĩa tập lồi): Tập $L \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi, nếu $\forall x, y \in L \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in L, \forall \lambda; 0 \leq \lambda \leq 1$. Nói cách khác, tập L là tập lồi, nếu đoạn thẳng nối hai điểm trong L nằm gọn trong L.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^2$, đoạn thẳng, đường thẳng, tia, toàn bộ $\mathbb{R}^2$, nửa mặt phẳng, đa giác lồi, tam giác, hình tròn, hình elip đều là các tập lồi.

Trong $\mathbb{R}^3$, đoạn thẳng, đường thẳng, mặt phẳng, đa diện lồi là các tập lồi.

1.3. Định nghĩa 3 (Định nghĩa điểm cực biên của một tập lồi):

Điểm x_0 được gọi là điểm cực biên của tập lồi L, nếu

$$x_0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2, x^1, x^2 \in L \quad 0 < \lambda < 1 \text{ thì } \Rightarrow x_0 = x^1 = x^2.$$

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^2$, đoạn thẳng, thì hai đầu mút là các điểm cực biên. Hình tam giác, thì các đỉnh là các điểm cực biên.

1.4. Định nghĩa 4 (Định nghĩa đa diện lồi): Ta gọi một đa diện lồi với các

$$\text{đỉnh } x^1, x^2, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n \text{ là tập } L = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_m x^m\},$$

trong đó $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$.

Nhận xét: L là một tập lồi và các điểm $x^1, x^2, \dots, x^m$ là các điểm cực biên, sau khi đã loại đi các điểm là tổ hợp lồi của các điểm còn lại.

Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^2$, đa diện lồi sinh bởi hai điểm là đoạn thẳng nối hai điểm đó, đa giác lồi là đa diện lồi sinh bởi các đỉnh của nó.

2. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính:

2.1. Định lý 1: Tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

2.2. Định lý 2: Tập hợp các phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

3. Tính chất của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc (đã nói ở §2)

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

3.1. Định nghĩa 5: Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ là một phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó

$$x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \dots + x_{n0} A^n = b.$$

Ứng với những $x_{j0} > 0$ hệ $\{A^j\}$ được gọi là hệ véctor liên kết với x^0 .

Ví dụ: Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính có tập phương án là

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

Với tập phương án này ta có $x_1 A^1 + x_2 A^2 + x_3 A^3 = b$, trong đó

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ta có $x^0 = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ là một phương án của bài toán (vì thỏa hệ

phương trình), và $\frac{7}{3} A^1 + \frac{1}{3} A^2 + 0 A^3 = b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vậy A^1, A^2 là hệ véctor liên kết của x^0 .

Lại có $x^1 = \left(0, \frac{22}{3}, \frac{7}{3}\right)$ là một phương án của bài toán, và

$$0 \cdot A^1 + \frac{22}{3} \cdot A^2 + \frac{7}{3} \cdot A^3 = b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Vậy } A^2, A^3 \text{ là hệ véctor liên kết của } x^1.$$

3.2. Định lý 3: Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ là một phương án khác không của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó nếu x^0 là phương án cực biên của tập phương án thì hệ véctor liên kết với nó độc lập tuyến tính.

Ngược lại, nếu x^0 là một phương án có hệ véctor liên kết với nó độc lập tuyến tính thì x^0 là một phương án cực biên.

Ghi chú: Vì tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi, nên khái niệm phương án cực biên tức là điểm cực biên của tập lồi.

3.3. Hệ quả 1: Số phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

3.4. Định nghĩa 6: Một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được gọi là không suy biến nếu số thành phần dương của nó bằng m . Nếu số thành phần dương ít hơn m thì phương án cực biên này gọi là suy biến.

Ví dụ: Xét bài toán Quy hoạch tuyến tính có tập phương án là

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Ta có $x^0 = (0, 5, 5)$ là một phương án cực biên của bài toán, vì hệ véctor liên kết với nó là $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hai véctor này độc lập tuyến tính. Hơn nữa đây là phương án cực biên không suy biến vì số thành phần dương của nó là 2 bằng số dòng của ma trận A .

$x^1 = (5, 0, 0)$ là một phương án cực biên của bài toán, vì hệ véctor liên kết với nó là $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hệ một véctor này độc lập tuyến tính. Nhưng đây

không phải là phương án cực biên không suy biến vì số thành phần dương của nó là 1.

Ta có $x^2 = (1, 4, 4)$ là một phương án của bài toán. Nhưng không phải là phương án cực biên, vì hệ vectơ liên kết với nó là $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, hệ vectơ này phụ thuộc tuyến tính.

3.5. Hệ quả 2: Số thành phần dương của một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa là bằng m (m là số dòng của ma trận A).

3.6. Định lý 4: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập phương án khác rỗng thì nó có ít nhất một phương án cực biên.

Các định lý trên đây đã chỉ ra cho chúng ta cách thành lập một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là:

- Xác định các hệ gồm m vectơ độc lập tuyến tính của hệ vectơ $A^1, A^2, \dots, A^n$. Số hệ con này hữu hạn.
- Biểu diễn vectơ b theo các hệ con ở trên, ta được các hệ số biểu diễn. Thành lập vectơ x có các thành phần là hệ số biểu diễn.
- Loại đi những vectơ x có thành phần âm, các vectơ còn lại là các phương án cực biên.

Ví dụ: Tìm tất cả các phương án cực biên của tập phương án của bài toán

$$f = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Giải:

Có tất cả 4 vectơ hai chiều là:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Từ đó lấy được các hệ}$$

con độc lập tuyến tính là

$$\{A^1; A^2\}, \{A^1; A^3\}, \{A^1; A^4\}, \{A^2; A^3\}, \{A^2; A^4\}, \{A^3; A^4\}$$

(đây cũng là các cơ sở trong $\mathbb{R}^2$).

Biểu diễn vectơ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ theo các hệ độc lập tuyến tính này, ta có

$$b = 5A^1 + A^2, \quad b = 6A^1 - A^3, \quad b = \frac{9}{2}A^1 + \frac{1}{2}A^4, \quad b = 6A^2 + 5A^3,$$

$b = -9A^2 + 5A^4, \quad b = 3A^3 + 2A^4$. Từ đây ta có các vectơ thỏa hệ phương trình trên là $x^1 = (5, 1, 0, 0), \quad x^2 = (6, 0, -1, 0), \quad x^3 = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right),$

$$x^4 = (0, 6, 5, 0), \quad x^5 = (0, -9, 0, 5), \quad x^6 = (0, 0, 3, 2).$$

Loại bỏ các vectơ có thành phần âm ta được 4 phương án cực biên là $x^1 = (5, 1, 0, 0), \quad x^3 = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \quad x^4 = (0, 6, 5, 0), \quad x^6 = (0, 0, 3, 2).$

3.7. Định lý 5: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

Nhận xét: Nhờ định lý này, nếu ta chứng minh được bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu, thì nó sẽ có phương án cực biên là tối ưu. Trên đây chúng ta có thể tìm được tất cả các phương án cực biên (vì số phương án cực biên là hữu hạn; hệ quả 1). Do đó trong số các phương án cực biên vừa chỉ ra, lần lượt thử từng phương án ta được phương án tối ưu.

3.8. Định lý 6: Nếu tập phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính (bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát) không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán sẽ có ít nhất một phương án tối ưu là phương án cực biên.

3.9. Định lý 7: Điều kiện cần và đủ để bài toán Quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu là tập phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới (nếu là bài toán *min*) hoặc bị chặn trên (nếu là bài toán *max*).

Ví dụ 1: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = 2x_1 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 4.$$

Giải: Trước tiên ta tìm các phương án cực biên. Kể thừa ví dụ ở trên. Có 4 vectơ cột $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Từ các vectơ này ta thu được các hệ con độc lập tuyến tính và các phương án tương ứng

$$\{A^1; A^2\} \text{ có phương án tương ứng } x^1 = (5, 1, 0, 0),$$

$$\{A^1; A^3\} \text{ có phương án tương ứng } x^2 = (6, 0, -1, 0),$$

$$\{A^1; A^4\} \text{ có phương án tương ứng } x^3 = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\{A^2; A^3\} \text{ có phương án tương ứng } x^4 = (0, 6, 5, 0),$$

$$\{A^2; A^4\} \text{ có phương án tương ứng } x^5 = (0, -9, 0, 5),$$

$$\{A^3; A^4\} \text{ có phương án tương ứng } x^6 = (0, 0, 3, 2).$$

Từ đây ta có các phương án cực biên $x^1 = (5, 1, 0, 0)$, $x^3 = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $x^4 = (0, 6, 5, 0)$, $x^6 = (0, 0, 3, 2)$.

Hiển nhiên hàm mục tiêu của bài toán bị chặn dưới bởi 0, do đó theo định lý 7 bài toán có phương án tối ưu là phương án cực biên.

$$\text{Ta có } f(x^1) = f(5, 1, 0, 0) = 2.5 + 1.0 + 5.0 = 10,$$

$$f(x^3) = f\left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{9}{2} + 1.0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{2}, \quad f(x^4) = 5, \quad f(x^6) = 13.$$

Vậy $x^4 = (0, 6, 5, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán, và giá trị tối ưu là 5.

Ví dụ 2: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

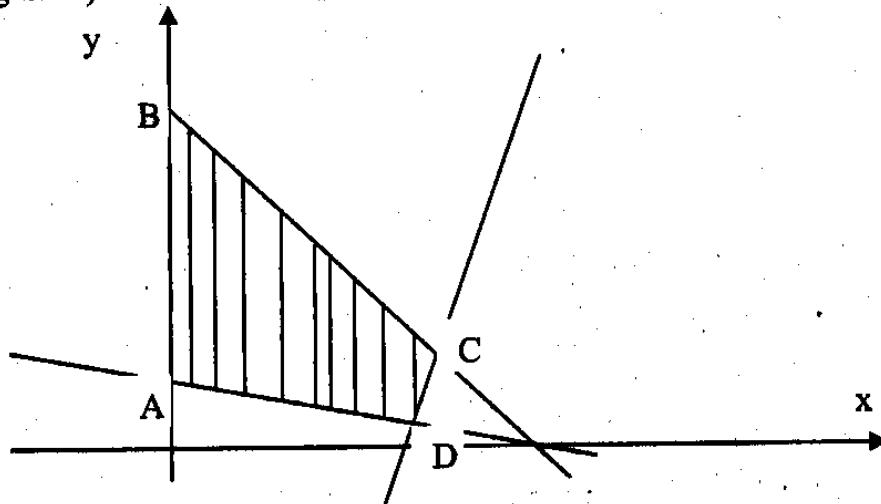
Giải: Tập phương án của bài toán là một tập lồi đa diện, cụ thể đó là tứ giác ABCD (hình). Trong đó $A(0;1)$, $B(0;4)$, $C\left(\frac{30}{13}; \frac{12}{13}\right)$, $D\left(\frac{21}{10}; \frac{3}{10}\right)$, đây cũng là các phương án cực biên, do đó theo định lý 6 bài toán có phương án tối ưu là phương án cực biên. Bằng cách thử các phương án cực biên ta được

$$f(A) = f(0;1) = 2, \quad f(B) = f(0;4) = 8, \quad f(C) = f\left(\frac{30}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{30}{13} + 2 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13},$$

$$f(D) = f\left(\frac{21}{10}; \frac{3}{10}\right) = \frac{21}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{27}{10}.$$

Vậy phương án tối ưu là $B(0;4)$, và giá trị tối ưu là 8.

(Chú ý tọa độ các đỉnh A, B, C, D tìm được từ việc giải các hệ phương trình)



Bài tập

1. Trong $\mathbb{R}^2$ cho hai điểm $A(1;1)$, $B(3;1)$. Tìm tổ hợp lồi sinh bởi hai điểm A, B.

2. Tìm các điểm cực biên của tập lồi

$$L = \{x \in \mathbb{R} / x = 5 - 3\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

3. Tìm các điểm cực biên của tập lồi

$$L = \{x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 / x = \lambda(1; -1) + (1 - \lambda)(2; 1), 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

4. Cho A, B là hai tập lồi. Chứng minh rằng $A \cap B$ là một tập lồi, nhưng $A \cup B$ có thể không là tập lồi.

5. Chứng minh các tập sau đây là các tập lồi:

a) $X = \{(x, y) / y - ax^2 \geq 0\}, a > 0.$

b) $Y = \{(x, y) / 1 \leq x + 2y \leq 5\}.$

6. Chứng minh Định lý 1: Tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

7. Chứng minh Định lý 2: Tập hợp các phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

8. Chứng minh Định lý 3: Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ là một phương án khác không của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc. Khi đó nếu x^0 là phương án cực biên của tập phương án thì hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính. Ngược lại, nếu x^0 là một phương án có hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính thì x^0 là một phương án cực biên.
9. Chứng minh Hệ quả 1: Số phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.
10. Chứng minh Hệ quả 2: Số thành phần dương của một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa là bằng m (m là số dòng của ma trận A và cũng là hạng của A).
11. Chứng minh Định lý 4: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có tập phương án khác rỗng thì nó có ít nhất một phương án cực biên.
12. Chứng minh Định lý 5: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.
13. Chứng minh Định lý 6: Nếu tập phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính không rỗng và là một đa diện lồi thì bài toán sẽ có ít nhất một phương án tối ưu là phương án cực biên.
14. Giải bài toán

$$f = x_1 + 6x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$
15. Giải bài toán

$$f = x_1 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$
16. Giải bài toán

$$f = x_1 + x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

17. Giải bài toán $f = x_1 - 6x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + & + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 4 \\ & + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases} \quad x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Lời giải hoặc hướng dẫn

1. Tổ hợp lồi sinh bởi hai điểm $A(1;1)$ và $B(3;1)$ là tập hợp các điểm

$$\begin{aligned} & \{x = (x_1, x_2) \in R^2 / x = t(1;1) + (1-t)(3;1), 0 \leq t \leq 1\} \\ & = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : \begin{cases} x_1 = 3 - 2t \\ x_2 = 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Đây chính là một đoạn thẳng.

2. Hai điểm cực biên là $x=2$ và $x=5$. Thật vậy, vì ta có

$$L = \{x \in \mathbb{R} / x = 5 - 3\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

nên tập L chính là đoạn thẳng $[2;5]$. Từ đó $2 = tx + (1-t)y, x, y \in [2;5]$ thì $2 = x = y$. Vì $2 = tx + (1-t)y \geq t2 + (1-t)2 = 2, t \in (0;1)$.

3. Hai điểm cực biên là $(1;-1)$ và $(2;1)$. Chứng minh tương tự bài 2.

4. Dùng định nghĩa tập lồi thấy ngay giao của hai hay nhiều tập lồi là một tập lồi. Nhưng hợp của hai tập lồi có thể không lồi. Chẳng hạn

$$A = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 16\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \in R^2 / \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \right\}$$

Sau khi vẽ hình ta thấy ngay A hợp B không lồi.

5. Đây là phần lõm bên trong của parabol nên thấy ngay đây là tập lồi. Nhưng có thể chứng minh trực tiếp bằng định nghĩa như sau:

$$\forall (x, y), (x', y') \in X = \{(x, y) / y - ax^2 \geq 0\}, a > 0. \text{ Ta chứng minh}$$

$$\lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y') \in X, 0 \leq \lambda \leq 1. \text{ Thật vậy}$$

$$\lambda(x, y) + (1-\lambda)(x', y') = (\lambda x + (1-\lambda)x'; \lambda y + (1-\lambda)y'). \text{ Vì}$$

$$(x, y), (x', y') \in X \text{ nên}$$

$$\begin{cases} y - ax^2 \geq 0 \\ y' - ax'^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda y \geq \lambda ax^2 \\ (1-\lambda)y' \geq (1-\lambda)ax'^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda y + (1-\lambda)y' \geq \lambda ax^2 + (1-\lambda)ax'^2$$

Ta có $\lambda ax^2 + (1-\lambda)ax'^2 \geq a(\lambda x + (1-\lambda)x')^2$ vì

$$\lambda ax^2 + (1-\lambda)ax'^2 \geq a(\lambda x + (1-\lambda)x')^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda ax^2 + (1-\lambda)ax'^2 \geq a\lambda^2 x^2 + 2a\lambda(1-\lambda)xx' + a(1-\lambda)^2 x'^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)x'^2 \geq 2\lambda(1-\lambda)xx'$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x'^2 \geq 2xx'$$

Từ đó $\lambda y + (1-\lambda)y' \geq a(\lambda x + (1-\lambda)x')^2$. Đó chính là đpcm.

6. Trước tiên ta chứng minh tập hợp các phương án của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là tập lồi.

Thật vậy, nếu x, y hai phương án thì $Ax=b, Ay=b$. Khi đó $A(\lambda x + (1-\lambda)y) = A\lambda x + A(1-\lambda)y = \lambda Ax +$

$(1-\lambda)Ay = \lambda b + (1-\lambda)b = b$. Chứng tỏ $\lambda x + (1-\lambda)y$ là một phương án. Trong trường hợp bài toán tổng quát, ta thay các dấu đẳng thức bởi bất đẳng thức.

7. Giả sử x_1, x_2 là hai phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính. Khi đó $f(x_1) = f(x_2) = \max\{f(x)/x \in D\}$ (hoặc min), D là tập phương án. Xét $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, ta chứng minh y cũng là phương án tối ưu. $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ $f(y) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(\lambda x_1) + f((1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \max\{f(x)/x \in D\}$ (Vì hàm mục tiêu f là hàm tuyến tính).

8. Giả sử phản chứng $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ có r thành phần đầu dương là phương án cực biên mà hệ vectơ liên kết với nó $A^1, A^2, \dots, A^r$ lại phụ thuộc tuyến tính. Từ hệ $A^1, A^2, \dots, A^r$ phụ thuộc tuyến tính ta tìm được các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ không đồng thời bằng 0 thỏa $\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_r A^r = 0$. Với $\alpha > 0$ tùy ý ta có $\alpha \alpha_1 A^1 + \alpha \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha \alpha_r A^r = 0$ (*). x^0 là một phương án nên $x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \dots + x_{r0} A^r = b$ (**). Từ (*) và (**) suy ra $(x_{10} \pm \alpha \alpha_1) A^1 + (x_{20} \pm \alpha \alpha_2) A^2 + \dots + (x_{r0} \pm \alpha \alpha_r) A^r = b$. Xét hai vectơ

$$x^1 = (x_{10} - \alpha\alpha_1, x_{20} - \alpha\alpha_2, \dots, x_{r0} - \alpha\alpha_r, 0, 0, \dots, 0)$$

$$x^2 = (x_{10} + \alpha\alpha_1, x_{20} + \alpha\alpha_2, \dots, x_{r0} + \alpha\alpha_r, 0, 0, \dots, 0).$$

Do $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0} > 0$ nên có thể chọn $\alpha > 0$ đủ nhỏ sao cho $x^1, x^2 \geq 0$ (tức là tất cả các thành phần của nó đều không âm). Khi đó hiển nhiên x^1, x^2 là các phương án khác nhau và ta có $x^0 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.

Chúng tỏ x^0 không phải là phương án cực biên. Vậy hệ vectơ liên kết với nó $A^1, A^2, \dots, A^r$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, giả sử phương án $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ có r thành phần đầu dương, các thành phần còn lại đều bằng không, nghĩa là nó có dạng $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}, 0, 0, \dots, 0)$. Khi đó $Ax_0 = b$ hay

$$A(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}, 0, 0, \dots, 0)^T = x_{10}A^1 + x_{20}A^2 + \dots + x_{r0}A^r = b.$$

Trong đó $A^1, A^2, \dots, A^r, A^{r+1}, \dots, A^n$ là các vectơ cột của A . Giả thiết $A^1, A^2, \dots, A^r$ độc lập tuyến tính ta chứng minh x^0 là phương án cực biên.

Giả sử $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$, $0 < \lambda < 1$ (với x^1, x^2 là hai phương án). Khi đó $x_{j0} = \lambda x_{j1} + (1-\lambda)x_{j2}$ với x_{j0}, x_{j1}, x_{j2} là các thành phần thứ j của x^0, x^1, x^2 . Do $0 < \lambda, 1-\lambda < 1$ nên $x_{j0} = 0$ thì $x_{j1} = 0$ và $x_{j2} = 0$, có thể giả sử

$$x^1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{r1}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$x^2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{r2}, 0, 0, \dots, 0)$$

Ta có $Ax_0 = Ax_1 = Ax_2 = b$ hay là

$$x_{10}A^1 + x_{20}A^2 + \dots + x_{r0}A^r = b$$

$$x_{11}A^1 + x_{21}A^2 + \dots + x_{r1}A^r = b$$

$$x_{12}A^1 + x_{22}A^2 + \dots + x_{r2}A^r = b.$$

Vì hệ $A^1, A^2, \dots, A^r$ độc lập tuyến tính nên từ ba đẳng thức trên suy ra $x_{j0} = x_{j1} = x_{j2}$ với mọi $j = \overline{1, r}$. Vậy $x^0 = x^1 = x^2$, nghĩa là x^0 là phương án cực biên.

9. Theo bài 8 nếu x^0 là phương án cực biên thì hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính. Ma trận A có tất cả là n vectơ cột $A^1, A^2, \dots, A^n$ nên số hệ

véc tơ con độc lập tuyến tính phải hữu hạn, dẫn đến số phương án cực biên cũng hữu hạn.

10. Giả sử $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ có r thành phần đầu dương, khi đó hệ véc tơ liên kết với nó là $A^1, A^2, \dots, A^r$. Theo bài 8 hệ này độc lập tuyến tính, ma trận A có hạng bằng m do đó r không vượt quá m .

11. x^0 là một phương án của bài toán. Nếu $x^0 = 0$ thì nó là phương án cực biên. Nếu $x^0 \neq 0$ ta có thể giả thiết nó có dạng $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}, 0, 0, \dots, 0)$ với r thành phần đầu dương. Khi đó $x_{10}A^1 + x_{20}A^2 + \dots + x_{r0}A^r = b$.

Nếu x^0 không phải là phương án cực biên thì hệ $A^1, A^2, \dots, A^r$ phụ thuộc tuyến tính. Ta tìm được các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ không đồng thời bằng 0 thỏa $\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_r A^r = 0$, trong các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ có thể giả sử có ít nhất một số dương. Với $\alpha > 0$ tùy ý ta có $\alpha \alpha_1 A^1 + \alpha \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha \alpha_r A^r = 0$. Suy ra $(x_{10} - \alpha \alpha_1)A^1 + (x_{20} - \alpha \alpha_2)A^2 + \dots + (x_{r0} - \alpha \alpha_r)A^r = b$. Do $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0} > 0$ nên có thể chọn $\alpha > 0$ đủ nhỏ sao cho $x^1 = (x_{10} - \alpha \alpha_1, x_{20} - \alpha \alpha_2, \dots, x_{r0} - \alpha \alpha_r, 0, 0, \dots, 0) \geq 0$. Có thể chọn $\alpha = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{\alpha_i} / \alpha_i > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{\alpha_s} > 0$, thì véc tơ

$$x^1 = (x_{10} - \alpha \alpha_1, x_{20} - \alpha \alpha_2, \dots, x_{r0} - \alpha \alpha_r, 0, 0, \dots, 0)$$

có thành phần thứ s là $x_{s0} - \alpha \alpha_s = x_{s0} - \alpha_s \frac{x_{s0}}{\alpha_s} = 0$. Lúc này véc tơ x^1 có số thành phần dương ít hơn x^0 . Nếu x^1 chưa phải là phương án cực biên thì làm tương tự ta xây dựng phương án x^2 có số thành phần dương ít hơn x^1 . Quá trình này phải dừng, tức là ta tìm được phương án cực biên.

12. Chứng minh Định lý 5: Nếu bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì nó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

Trước tiên ta chứng minh mệnh đề: Nếu $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, với $(0 < \lambda < 1)$ là một phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính thì x^1, x^2 cũng là phương án tối ưu. Thật vậy, $f(x^0) = f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) =$

$= \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2) \geq \lambda f(x^0) + (1 - \lambda)f(x^0) = f(x^0)$ (giả sử đây là bài toán min). Vì $0 < \lambda < 1$, nên bất đẳng thức trên chứng tỏ

$$f(x^0) = f(x^1) = f(x^2).$$

Trở lại bài toán 12, giả sử x^0 là một phương án tối ưu của bài toán. Nếu $x^0 = 0$ thì đó là phương án cực biên, ngược lại theo cách chứng minh bài 8, bài 10 và bài 11 ở trên ta xây dựng được $x^0 = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$, trong đó x^1 có số thành phần dương ít hơn so với x^0 . Theo mệnh đề vừa chứng minh x^1 cũng là phương án tối ưu.

Nếu x^1 là phương án tối ưu thì xong, nếu không ta xây dựng được x^{11} là phương án tối ưu có số thành phần dương ít hơn x^1 Quá trình này phải dừng. Khi đó ta thu được phương án tối ưu là phương án cực biên, hoặc phương án tối ưu 0. Trường hợp nào đi nữa ta cũng có phương án tối ưu là phương án cực biên.

13. Ta xét bài toán min. Giả sử x là một phương án bất kỳ, ta có $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k$ trong đó $x^1, x^2, \dots, x^k$ là các phương án cực biên, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$. Giả sử

$$f(x^1) = \min \{ f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^k) \} \quad (f \text{ là hàm mục tiêu}).$$

Vì f tuyến tính nên ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k) = \lambda_1 f(x^1) + \lambda_2 f(x^2) + \dots + \lambda_k f(x^k) \\ &\geq \lambda_1 f(x^1) + \lambda_2 f(x^1) + \dots + \lambda_k f(x^1) = f(x^1). \end{aligned}$$

Điều này đúng cho mọi phương án x nên x^1 là phương án tối ưu.

14.

$$f = x_1 + 6x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 5 & (1) \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 8 & (2) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 4.$$

Ta có $f = x_1 + 6x_3 - \frac{5}{3}(5 - x_1 - 2x_3) = \frac{8}{3}x_1 + \frac{28}{3}x_3 - \frac{25}{3} \geq -\frac{25}{3}$ (dùng (1)).

Vậy hàm mục tiêu bị chặn dưới. Dễ thấy tập phương án không rỗng, do đó bài toán có phương án tối ưu và do đó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

Có 4 vectơ cột $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Từ các vectơ này ta thu được các hệ con độc lập tuyến tính và các phương án tương ứng: $\{A^1; A^2\}$ có phương án tương ứng $x^1 = \left(5, \frac{8}{3}, 0, 0\right)$,

$\{A^1; A^3\}$ có phương án tương ứng $x^2 = (21, 0, -8, 0)$,

$\{A^1; A^4\}$ có phương án tương ứng $x^3 = (-7, 4, 0, 0)$,

$\{A^2; A^3\}$ có phương án tương ứng $x^4 = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$,

$\{A^2; A^4\}$ có phương án tương ứng $x^5 = \left(0, \frac{14}{9}, 0, \frac{5}{3}\right)$,

$\{A^3; A^4\}$ có phương án tương ứng $x^6 = (0, 0, -2, 3)$.

Từ đây ta có các phương án cực biên $x^1 = \left(5, \frac{8}{3}, 0, 0\right)$,

$x^4 = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$, $x^5 = \left(0, \frac{14}{9}, 0, \frac{5}{3}\right)$. Ta có $f(x^1) = 5$, $f(x^4) = 15$,

$f(x^5) = \frac{-25}{3}$. Vậy $x^5 = \left(0, \frac{14}{9}, 0, \frac{5}{3}\right)$ là phương án tối ưu của bài toán, và

giá trị tối ưu là $\frac{-25}{3}$.

15. Phương án tối ưu là $x = \left(3, \frac{1}{3}, 0\right)$, và giá trị tối ưu là $f(x) = 3$.

16. Phương án tối ưu là $x = (1, 4, 0, 0)$, và giá trị tối ưu là $f(x) = 1$.

17. Phương án tối ưu là $x = (0, 6, 0, 2, 4)$, và giá trị tối ưu là $f(x) = -2$.

§4. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1. Giới thiệu chung:

Vì mọi bài toán Quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về dạng chính tắc, nên ở đây ta chỉ xét cho bài toán dạng chính tắc.

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = b$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Giả sử bài toán đang xét ta đã biết một phương án cực biên dạng $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$, trong đó $x_{j0} > 0, j = \overline{1, m}$. Cơ sở liên kết của x là $A^1, A^2, \dots, A^m$. Vì x là phương án nên $x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \dots + x_{m0} A^m = b$, lúc này giá trị hàm mục tiêu là $f(x) = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + \dots + c_m x_{m0}$.

Với mỗi $j = \overline{1, n}$ ta có $x_{1j} A^1 + x_{2j} A^2 + \dots + x_{mj} A^m = A^j$ (tính chất cơ sở).

Ký hiệu $x^j = (x_{1j}; x_{2j}; \dots; x_{mj})$ thì với $j = \overline{1, m}$ ta có x^j là vectơ đơn vị thứ j . Đặt $b = A^0$ thì $x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \dots + x_{m0} A^m = A^0$ và $x^0 = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0})$.

Nếu mà ta đã biết được x là phương án tối ưu nhờ một cách nào đó thì mục đích của ta đã xong. Nếu x không phải là phương án tối ưu thì ta tìm phương án cực biên khác tốt hơn tức là phương án làm cho giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn. Muốn vậy ta phải xây dựng một cơ sở mới; đơn giản nhất là thay thế một vectơ trong cơ sở cũ bằng một vectơ nằm ngoài cơ sở cũ.

Nhận xét ở trên chính là ý tưởng của thuật toán đơn hình. Một ý tưởng thật giản dị *thay thế một vectơ trong cơ sở cũ bằng một vectơ nằm ngoài cơ sở cũ nếu phương án đang xét chưa tối ưu.*

Giả sử vectơ đưa vào cơ sở mới là A^j , trong đó $j = \overline{m+1, n}$, và hiển nhiên $x_{1j} A^1 + x_{2j} A^2 + \dots + x_{mj} A^m = A^j$. Nhân hai vế của đẳng thức này với $\theta > 0$ ta được $\theta x_{1j} A^1 + \theta x_{2j} A^2 + \dots + \theta x_{mj} A^m = \theta A^j$. Từ $x_{10} A^1 + x_{20} A^2 + \dots + x_{m0} A^m = b$, suy ra

$$(x_{10} - \theta x_{1j}) A^1 + (x_{20} - \theta x_{2j}) A^2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mj}) A^m = b - \theta A^j$$

hay $(x_{10} - \theta x_{1j})A^1 + (x_{20} - \theta x_{2j})A^2 + \dots + (x_{m0} - \theta x_{mj})A^m + \theta A^j = b$.

Vì $x_{i0} > 0, i = \overline{1, m}$ nên có thể tìm được số $\theta > 0$ đủ nhỏ sao cho

$x_{i0} - \theta x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}$. Khi đó vectơ

$x' = (x_{10} - \theta x_{1j}; x_{20} - \theta x_{2j}; \dots; x_{m0} - \theta x_{mj}; \dots; \theta; 0; \dots; 0)$ ($\theta > 0$ là thành phần thứ j) là một phương án của bài toán (có thể không phải là phương án cực biên). Khi đó

$$f(x') = \sum_{i=1}^m c_i (x_{i0} - \theta x_{ij}) + c_j \theta = \sum_{i=1}^m c_i x_{i0} - \theta \left(\sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j \right).$$

Đặt $z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} = \langle c, x^j \rangle, j = \overline{1, n}$. Ta có :

$$f(x') = f(x) - \theta(z_j - c_j) = f(x) - \theta \Delta_j$$

trong đó $\Delta_j = z_j - c_j$ được gọi là ước lượng của vectơ A^j ứng với phương án cực biên x .

Chú ý: Nếu A^j là vectơ trong cơ sở cũ thì vì $x^j = (0; 0; \dots; 1; 0; \dots; 0)$ là vectơ đơn vị thứ j nên $z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} = \langle c, x^j \rangle = c_j$ và do đó $\Delta_j = z_j - c_j = 0$.

2. Định lý 1: (Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ là một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc sao cho $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1, n}$ thì x là phương án tối ưu.

3. Định lý 2: Nếu tồn tại vectơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \leq 0$ (nghĩa là $x_{ij} \leq 0, i = \overline{1, m}$) thì bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập phương án.

Trước khi đi xa hơn ta xét một vài ví dụ để hiểu rõ hai định lý ở trên.

Ví dụ 1: Xét bài toán

$$f(x) = x_1 + 6x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

với phương án cực biên $x = (6, 8, 0)$. Xét xem x có phải là phương án tối ưu hay không?

Véc tơ x có cơ sở liên kết là: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ta xác định các véc tơ x^j .

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{21}A^2 = 1.A^1 + 0.A^2 \Rightarrow x^1 = (1, 0),$$

$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{22}A^2 = 0.A^1 + 1.A^2 \Rightarrow x^2 = (0, 1),$$

$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^2 = 2.A^1 + 1.A^2 \Rightarrow x^3 = (2, 1),$$

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j = \langle c, x^j \rangle - c_j.$$

Lần lượt thay $j=1, 2, 3$ ta có:

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = \langle c, x^1 \rangle - c_1 = \langle (1, 6), (1, 0) \rangle - 1 = 1.1 + 6.0 - 1 = 0,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \langle c, x^2 \rangle - c_2 = \langle (1, 6), (0, 1) \rangle - 6 = 1.0 + 6.1 - 6 = 0,$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = \langle (1, 6), (2, 1) \rangle - 9 = 1.2 + 6.1 - 9 = -1$$

Ta thấy tất cả các $\Delta_j \leq 0$ với mọi j . Vậy x là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là: $f(x) = 1.6 + 6.8 + 9.0 = 54$.

Ví dụ 2: Xét bài toán

$$f(x) = 7x_1 - 26x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ -x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

với phương án cực biên $x = (5, 0, 7)$. Xét xem x có phải là phương án tối ưu hay không?

Tương tự như trên ta có

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{31}A^3 = 1.A^1 + 0.A^3 \Rightarrow x^1 = (1, 0),$$

$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{32}A^3 = -2A^1 - 1.A^3 \Rightarrow x^2 = (-2, -1),$$

$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^3 = 0.A^1 + 1.A^3 \Rightarrow x^3 = (0, 1),$$

Từ đó

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = \langle c, x^1 \rangle - c_1 = \langle (7, 9), (1, 0) \rangle - 7 = 0,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \langle c, x^2 \rangle - c_2 = \langle (7, 9), (-2, -1) \rangle - (-26) = 3,$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = \langle (7, 9), (0, 1) \rangle - 9 = 0.$$

Ta thấy $\Delta_2 > 0$ và $x^2 = (-2, -1) \leq 0$. Vậy bài toán không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn dưới trên tập phương án.

Ví dụ 3: Cho bài toán

$$f(x) = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 21 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Chúng minh $x = (1, 2, 3, 0)$ là phương án cực biên, tối ưu của bài toán đã cho.

Chúng ta thấy $x = (1, 2, 3, 0)$ đúng là một phương án, vì thỏa mãn tất cả các ràng buộc của bài toán. Phương án này có hệ véctơ liên kết là $A^1 = (3, 7, 2)$; $A^2 = (3, -1, -1)$; $A^3 = (4, 1, 5)$. Dễ thấy đây là hệ độc lập tuyến tính nên x là phương án cực biên. Biểu diễn các véctơ A^1, A^2, A^3, A^4 theo hệ véctơ ở trên ta có:

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{21}A^2 + x_{31}A^3 = 1A^1 + 0A^2 + 0A^3,$$

$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{22}A^2 + x_{32}A^3 = 0A^1 + 1A^2 + 0A^3,$$

$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^2 + x_{33}A^3 = 0A^1 + 0A^2 + 1A^3,$$

$$A^4 = x_{14}A^1 + x_{24}A^2 + x_{34}A^3 = \frac{120}{131}A^1 + \frac{73}{131}A^2 + \frac{19}{131}A^3.$$

Từ đây ta có

$$x^1 = (1, 0, 0), x^2 = (0, 1, 0), x^3 = (0, 0, 1), x^4 = \left(\frac{120}{131}, \frac{73}{131}, \frac{19}{131} \right), \text{ và các}$$

$$\text{ước lượng } \Delta_j \text{ sẽ là } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0, \Delta_4 = \langle c, x^4 \rangle - c_4 = -4 \cdot \frac{120}{131}$$

$$+ 3 \cdot \frac{73}{131} + 7 \cdot \frac{19}{131} - 8 = -\frac{1176}{131} < 0. \text{ Vậy theo định lý 1, } x \text{ là phương án tối ưu.}$$

4. Định lý 3: Nếu tồn tại vectơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ sao cho $\Delta_j > 0$, và với mỗi j mà $\Delta_j > 0$ ta luôn tìm được ít nhất một $x_{ij} > 0$, thì khi đó ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn x , nghĩa là phương án này làm cho hàm mục tiêu nhỏ hơn phương án x .

Chứng minh: Trước tiên ta tạm chấp nhận một kết quả của Đại số tuyến tính: Nếu $A^1, A^2, \dots, A^m$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^m$ và A^k là một vectơ của không gian $\mathbb{R}^m$ sao cho vectơ $x^k = B^{-1}A^k$ có thành phần thứ s là $x_{sk} \neq 0$ thì hệ vectơ $A^1, A^2, \dots, A^{s-1}, A^k, A^{s+1}, \dots, A^m$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^m$ (với B là ma trận có các cột là các vectơ $A^1, A^2, \dots, A^m$).

Giả sử $\Delta_k > 0$ và $x_{ik} > 0$. Ta sẽ thay A^k vào cơ sở. Vì theo cách xây dựng như trên $x' = (x_{10} - \theta x_{1k}; x_{20} - \theta x_{2k}; \dots; x_{m0} - \theta x_{mk}; \dots; \theta; 0; \dots; 0)$ sẽ là một phương án với điều kiện $x_{i0} - \theta x_{ik} \geq 0, i = \overline{1, m}$. Điều này tương đương $0 < \theta \leq \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$, (vì các phần tử của tập này hữu hạn nên ta có thể tìm được min, chẳng hạn tại chỉ số s). Ta sẽ chọn $\theta > 0$ sao cho hàm mục tiêu càng nhỏ càng tốt. Muốn vậy $\theta = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$, vì

$f(x') = f(x) - \theta \Delta_k$. Khi đó $x_{s0} - \theta x_{sk} = 0$ và phương án x' có dạng $x' = (x_{10} - \theta x_{1k}; x_{20} - \theta x_{2k}; \dots; x_{s-1,0} - \theta x_{s-1,k}; 0; x_{s+1,0} - \theta x_{s+1,k}; \dots; x_{m0} - \theta x_{mk}; \dots; \theta; 0; \dots; 0)$ (ở vị trí thứ s là 0, ở vị trí thứ k là θ), phương án này có không

quá m thành phần dương. Do $A^1, A^2, \dots, A^m$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^m$ và vectơ $x^k = B^{-1}A^k$ có thành phần thứ s là $x_{sk} > 0$ thì hệ vectơ $H = \{A^1, A^2, \dots, A^{s-1}, A^k, A^{s+1}, \dots, A^m\}$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^m$.

Phương án x' có hệ vectơ liên kết với nó là H độc lập tuyến tính nên suy ra x' là phương án cực biên. Hơn nữa từ đẳng thức $f(x') = f(x) - \theta \Delta_k$ trong đó $\theta, \Delta_k > 0$ suy ra phương án x' tốt hơn x . Định lý được chứng minh.

Nhận xét: Cách chứng minh định lý trên đã xây dựng cho ta một thuật toán tìm phương án tối ưu cho bài toán Quy hoạch tuyến tính. Ta lần lượt thực hiện các bước sau:

Từ cơ sở cũ của phương án x chưa tối ưu, đưa vectơ A^k ứng với $\Delta_k > 0$ vào thay cho vectơ A^s , chỉ số s được xác định khi tính $\min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$, ta được cơ sở mới là cơ sở liên kết của phương án cực biên x' .

Nếu có nhiều hơn một chỉ số j mà $\Delta_j > 0$ thì ta nên chọn $\Delta_j > 0$ nào? Từ đẳng thức $f(x') = f(x) - \theta \Delta_j$ thì ta sẽ chọn sao cho $f(x')$ càng nhỏ càng tốt, tức là $\theta \Delta_j$ lớn nhất. Thông thường ta chọn $\Delta_j > 0$ lớn nhất.

Với giả thiết bài toán không suy biến nên ta có $\theta = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0 \right\} > 0$ chỉ đạt min ở một chỉ số k nào đó. Vì nếu trái lại thì từ cách xây dựng x' ta thấy x' có nhiều nhất là $m-1$ thành phần dương.

Với giả thiết bài toán không suy biến nên từ phương án x' tốt hơn x . Ta kiểm tra phương án x' có thỏa các điều kiện của định lý 1 hay định lý 2 thì dừng lại, và ta được hoặc x' là phương án tối ưu (thỏa định lý 1) hoặc bài toán không có phương án tối ưu (thỏa định lý 2). Nếu không thỏa hai định lý này ta cho x' đóng vai trò như x và xây dựng một phương án mới tốt hơn phương án x' . Nhưng vì số phương án cực biên là hữu hạn nên sau một số hữu hạn lần ta sẽ chỉ ra được phương án tối ưu hoặc là hàm mục tiêu không bị chặn.

Ví dụ 1: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Giải:

Hai vectơ A^1, A^3 lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, phương án cực biên liên kết với nó là $x = (6, 0, 8)$, giá trị hàm mục tiêu $f(x) = 22$.

$$B = (A^1 \ A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ suy ra } x^j = B^{-1}A^j = A^j, j = 0, 1, 2, 3. \text{ Ta}$$

$$\text{tính } \Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, (j = 1, 2, 3), \text{ trong đó } c^0 = (c_1, c_3) = (1, 2).$$

$$\Delta_1 = \langle c^0, x^1 \rangle - c_1 = 1 - 1 = 0, (\text{Vi } x^1 = A^1 = (1, 0), c_1 = 1).$$

$$\Delta_2 = \langle c^0, x^2 \rangle - c_2 = 1.1 + 2.2 - (-2) = 7, (\text{Vi } x^2 = A^2 = (1, 2), c_2 = -2).$$

$$\Delta_3 = \langle c^0, x^3 \rangle - c_3 = 2 - 2 = 0, \text{ (Vì } x^3 = A^3 = (0, 1), c_3 = 2 \text{)}.$$

Ta thấy $\Delta_2 > 0$ và các thành phần của x^2 có ít nhất một thành phần dương, cho nên ta có thể tìm được một phương án x' tốt hơn x .

Ta đưa A^2 vào cơ sở.

$$x^0 = (6, 8) = (x_{10}, x_{30}), x^2 = (1, 2) = (x_{12}, x_{32}).$$

$$\theta = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i3}} : x_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{6}{1}, \frac{8}{2} \right\} = 4.$$

Min đạt được ở chỉ số $i=3$, dẫn đến A^3 bị loại ra khỏi cơ sở.

Thành lập phương án mới

$$x' = (x_{10} - \theta x_{1k}, x_{20} - \theta x_{2k}, \dots, x_{s-1,0} - \theta x_{s-1,k}, 0, x_{s+1,0} - \theta x_{s+1,k}, \dots, x_{m0} - \theta x_{mk}, \dots, \theta, 0, \dots, 0), \text{ ở đây } k=2, m=2, n=3. \text{ Từ đó } \theta=4 \text{ là thành phần thứ hai của } x', \text{ thành phần thứ 3 của } x' \text{ bằng 0, thành phần thứ nhất } x_{10} - \theta x_{12} = 6 - 4.1 = 2.$$

Vậy phương án mới $x' = (2, 4, 0)$. Giá trị hàm mục tiêu lúc này là $f(x') = f(2, 4, 0) = 2 - 2.4 = -6$ tốt hơn x .

Cũng có thể đem vectơ b biểu diễn theo cơ sở mới A^1, A^2 ta được các hệ số biểu diễn. Các hệ số biểu diễn đó chính là các thành phần dương của một phương án cực biên mới x' .

Lập lại quá trình trên với $x := x' = (2, 4, 0)$.

Hai vectơ A^1, A^2 lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, phương án cực biên liên kết với nó là $x = (2, 4, 0)$, giá trị hàm mục tiêu $f(x) = -6$.

$$B = (A^1 \ A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ suy ra}$$

$$x^j = B^{-1} A^j = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} A^j, j = 0, 1, 2, 3. \text{ Ta tính}$$

$$x^0 = B^{-1} A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (chú ý } A^0 = b),$$

$$x^1 = B^{-1} A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2 = B^{-1} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x^3 = B^{-1}A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

(Phần này cũng có thể làm tương tự như các ví dụ 1, 2, 3 ở trên)

$\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, (j = 1, 2, 3)$, trong đó $c^0 = (c_1, c_2) = (1, -2)$.

$$\Delta_1 = \langle c^0, x^1 \rangle - c_1 = \langle (1, -2), (1, 0) \rangle - 1 = 1.1 + (-2).0 - 1 = 0,$$

$$\Delta_2 = \langle c^0, x^2 \rangle - c_2 = \langle (1, -2), (0, 1) \rangle - (-2) = 1.0 + (-2).1 - (-2) = 0,$$

$$\Delta_3 = \langle c^0, x^3 \rangle - c_3 = \langle (1, -2), (-0.5, 0.5) \rangle - 2 = 1.(-0.5) + (-2).(0.5) - 2 = -\frac{7}{2}.$$

Đến đây ta thấy tất cả các $\Delta_j \leq 0, (j = 1, 2, 3)$. Vậy theo định lý 1

$x' = (2, 4, 0)$ là phương án tối ưu và giá trị tối ưu là -6.

Để làm rõ hơn ta xét thêm một ví dụ.

Ví dụ 2: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Giải:

Hai vectơ A^1, A^3 lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, phương án cực biên liên kết với nó là $x = (6, 0, 8, 0)$, giá trị hàm mục tiêu $f(x) = 22$.

$$B = (A^1 A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x^j = B^{-1}A^j = A^j, j = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ Ta tính}$$

$\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, (j = 1, 2, 3, 4)$, trong đó $c^0 = (c_1, c_3) = (1, 2)$.

$$\Delta_1 = \langle c^0, x^1 \rangle - c_1 = \langle (1, 2), (1, 0) \rangle - 1 = 1.1 + 2.0 - 1 = 0, \text{ (Vì}$$

$x^1 = A^1 = (1, 0), c_1 = 1$). Tương tự ta có:

$$\Delta_2 = \langle c^0, x^2 \rangle - c_2 = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle - (-2) = 1.1 + 2.2 - (-2) = 7,$$

$$\Delta_3 = \langle c^0, x^3 \rangle - c_3 = \langle (1, 2), (0, 1) \rangle - 2 = 1.0 + 2.1 - 2 = 0,$$

$$\Delta_4 = \langle c^0, x^4 \rangle - c_4 = \langle (1, 2), (4, 5) \rangle - 0 = 1.4 + 2.5 - 0 = 14,$$

Ta thấy $\Delta_2, \Delta_4 > 0$ và các thành phần của x^2, x^4 có ít nhất một thành phần dương, cho nên ta có thể tìm được một phương án x' tốt hơn x .

$\text{Max}\{\Delta_2, \Delta_4\} = \Delta_4$. Vậy ta đưa A^4 vào cơ sở.

$$x^0 = (6, 8) = (x_{10}, x_{30}), x^4 = (4, 5) = (x_{14}, x_{34}).$$

$$\theta = \min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i4}} : x_{i4} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{6}{4}, \frac{8}{5} \right\} = \frac{3}{2}.$$

Min đạt được ở chỉ số $i=1$, dẫn đến A^1 bị loại ra khỏi cơ sở.

Thành lập phương án mới

$$x' = (x_{10} - \theta x_{1k}; x_{20} - \theta x_{2k}; \dots; x_{s-1,0} - \theta x_{s-1,k}; 0; x_{s+1,0} - \theta x_{s+1,k}; \dots;$$

$; x_{m0} - \theta x_{mk}; \theta; 0; \dots; 0)$, ở đây $k=4, m=2, n=4$. Ta có $\theta = \frac{3}{2}$ là thành phần

thứ tư của x' , thành phần thứ 1 và 2 của x' bằng 0, thành phần thứ 3 là

$$x_{30} - \theta x_{34} = 8 - \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương án mới $x' = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Giá trị hàm mục tiêu lúc này là

$$f(x') = f(x') = f\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} = 1 \text{ tốt hơn } x.$$

Lập lại quá trình trên với $x := x' = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Đây là phương án

cực biên và cơ sở liên kết với nó là A^3, A^4 . Vì A^4 thay cho A^1 nên

$$B = (A^4 \ A^3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, x^j = B^{-1} A^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} A^j, j = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ Ta}$$

tính

$$x^0 = B^{-1} A^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (chú ý } A^0 = b),$$

$$x^1 = B^{-1} A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

$$x^2 = B^{-1} A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

$$x^3 = B^{-1}A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x^4 = B^{-1}A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, (j=1,2,3,4), \text{ trong đó } c^0 = (c_4, c_3) = (0, 2).$$

$$\Delta_1 = \langle c^0, x^1 \rangle - c_1 = \left\langle (0, 2), \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4} \right) \right\rangle - 1 = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) - 1 = \frac{-7}{2},$$

$$\Delta_2 = \langle c^0, x^2 \rangle - c_2 = \left\langle (0, 2), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right\rangle - (-2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} - (-2) = \frac{7}{2},$$

$$\Delta_3 = \langle c^0, x^3 \rangle - c_3 = \langle (0, 2), (0, 1) \rangle - 2 = 0,$$

$$\Delta_4 = \langle c^0, x^4 \rangle - c_4 = \langle (0, 2), (1, 0) \rangle - 0 = 0.$$

Ta thấy $\Delta_2 > 0$ và các thành phần của x^2 có ít nhất một thành phần dương, cho nên ta có thể tìm được một phương án x' tốt hơn x . v.v...

5. Phân tích thuật toán:

Khi kiểm tra một phương án cực biên x có phải là phương án tối ưu hay không ở mỗi bước lặp ta cần phải tính các tham số x_{ij}, Δ_j, f . Nhận thấy rằng việc xác định các x_{ij} là thực hiện nhiều phép tính nhất. Ở mỗi bước lặp ta phải giải n hệ phương trình tuyến tính, mỗi hệ gồm m phương trình m ẩn số (phép nhân ma trận $x^j = B^{-1}A^j$ ở trên là việc giải hệ phương trình).

Do cơ sở của phương án cực biên ở bước lặp sau chỉ khác cơ sở của phương án cực biên ở bước lặp trước đúng một véc tơ, nên ta có thể tìm một công thức truy toán mà khi tính toán các tham số ở bước sau có thể dùng các tham số ở bước trước. Nói cách khác ta có thể lưu trữ các dữ liệu ở bước trước để tính cho bước sau. Điều này sẽ làm giảm đi rất nhiều các phép tính.

Gọi giá trị các tham số ở bước trước là x_{ij}, Δ_j, f và ở bước sau là x'_{ij}, Δ'_j, f' . Giả sử cơ sở của phương án cực biên trước là $A^1, A^2, \dots, A^m$, ở bước tiếp theo là $A^1, A^2, \dots, A^{s-1}, A^k, A^{s+1}, \dots, A^m$, trong đó

$s \in \{1, 2, \dots, m\}, k \notin \{1, 2, \dots, m\}, k \neq 0$. Véc tơ A^k đưa vào cơ sở để thay cho véc tơ A^s , véc tơ A^k có dạng $A^k = \sum_{i=1}^m x_{ik} A^i; x_{sk} > 0$ (1).

$$A^j = \sum_{i=1}^m x_{ij} A^i \quad (A^j \text{ biểu thị tuyến tính qua cơ sở } A^1, A^2, \dots, A^m).$$

Bây giờ xét cơ sở mới $A^1, A^2, \dots, A^{s-1}, A^k, A^{s+1}, \dots, A^m$ ta có

$$A^j = \sum_{s \neq i=1}^m x'_{ij} A^i + x'_{kj} A^k \quad (2).$$

$$\text{Từ } A^k = \sum_{i=1}^m x_{ik} A^i \text{ ta suy ra véc tơ } A^s = \frac{1}{x_{sk}} \left(A^k - \sum_{s \neq i=1}^m x_{ik} A^i \right)$$

thay vào (1) ta được

$$A^j = \sum_{s \neq i=1}^m x_{ij} A^i + \frac{x_{sj}}{x_{sk}} \left(A^k - \sum_{s \neq i=1}^m x_{ik} A^i \right) = \sum_{s \neq i=1}^m \left(x_{ij} - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} x_{ik} \right) A^i + \frac{x_{sj}}{x_{sk}} A^k \quad (3).$$

Vì tính chất của cơ sở nên từ (2) và (3) ta có

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{sj}}{x_{sk}} x_{ik} & i \neq s \\ x'_{kj} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} \end{cases} \quad (4)$$

Đây chính là công thức truy toán để tính x'_{ij} . Ở phần 1 ta đã biết

$$f(x') = f(x) - \frac{x_{s0}}{x_{sk}} \Delta_k. \quad (5)$$

Cuối cùng ta tính các Δ'_j , ta có

$$\Delta'_j = \sum_{s \neq i=1}^m c_i x'_{ij} + c_k x'_{kj} - c_j, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

(Chú ý trong các công thức (4), (5), (6) c_i là hệ số của x_i trong hàm mục tiêu và A^i là các véc tơ trong cơ sở liên kết với phương án x')

Ba công thức (4), (5), (6) ở trên sẽ giúp cho việc tính toán giảm đi rất nhiều. Để thấy rõ hơn ta trở lại ví dụ 2 ở trên.

Ở vòng lặp thứ nhất ta có

Hai véctơ A^1, A^3 lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, phương án cực biên liên kết với nó là $x = (6, 0, 8, 0)$, giá trị hàm mục tiêu $f(x) = 22$.

$$B = (A^1 \ A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^j = B^{-1} A^j = A^j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4. \text{ Ta tính}$$

$$\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4), \text{ trong đó } c^0 = (c_1, c_3) = (1, 2).$$

$$\Delta_1 = \langle c^0, x^1 \rangle - c_1 = \langle (1, 2), (1, 0) \rangle - 1 = 1.1 + 2.0 - 1 = 0, \quad (\text{Vì } x^1 = A^1 = (1, 0), c_1 = 1).$$

$$\Delta_2 = \langle c^0, x^2 \rangle - c_2 = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle - (-2) = 1.1 + 2.2 - (-2) = 7,$$

$$\Delta_3 = \langle c^0, x^3 \rangle - c_3 = \langle (1, 2), (0, 1) \rangle - 2 = 1.0 + 2.1 - 2 = 0,$$

$$\Delta_4 = \langle c^0, x^4 \rangle - c_4 = \langle (1, 2), (4, 5) \rangle - 0 = 1.4 + 2.5 - 0 = 14.$$

Ở bước này việc tính x_{ij}, Δ_j, f là không có gì khó khăn bởi vì B là ma trận đơn vị. Nhưng ở các bước tiếp theo nếu tính như ở trên thì phải tính lại từ đầu mà không dùng được kết quả gì ở bước này cả. Sau khi đã xác định được véctơ A^4 đưa vào thay cho véctơ A^1 , áp dụng các công thức (4), (5), (6) ta có:

$$x'_{40} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = \frac{x_{s0}}{x_{s4}} = \frac{x_{10}}{x_{14}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad (\text{Chú ý } k=4, s=1)$$

$$x'_{30} = x_{30} - \frac{x_{10}}{x_{14}} x_{34} = 8 - \frac{6}{4} 5 = \frac{1}{2},$$

$$x'_{41} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = \frac{x_{s1}}{x_{s4}} = \frac{x_{11}}{x_{14}} = \frac{1}{4}, \quad (\text{Chú ý } k=4, s=1)$$

$$x'_{31} = x_{31} - \frac{x_{11}}{x_{14}} x_{34} = 0 - \frac{1}{4} 5 = -\frac{5}{4},$$

$$x'_{42} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = \frac{x_{s2}}{x_{s4}} = \frac{x_{12}}{x_{14}} = \frac{1}{4}, \quad (\text{Chú ý } k=4, s=1)$$

$$x'_{32} = x_{32} - \frac{x_{12}}{x_{14}} x_{34} = 2 - \frac{1}{4} 5 = \frac{3}{4},$$

$$x'_{43} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = \frac{x_{s3}}{x_{s4}} = \frac{x_{13}}{x_{14}} = \frac{0}{4} = 0 \quad (\text{Chú ý } k=4, s=1)$$

$$x'_{33} = x_{33} - \frac{x_{13}}{x_{14}} x_{34} = 1 - \frac{0}{4} 5 = 1,$$

$$x'_{44} = \frac{x_{sj}}{x_{sk}} = \frac{x_{s4}}{x_{s4}} = \frac{x_{14}}{x_{14}} = \frac{4}{4} = 1, \quad (\text{Chú ý } k=4, s=1)$$

$$x'_{34} = x_{34} - \frac{x_{14}}{x_{14}} x_{34} = 5 - \frac{4}{4} 5 = 0,$$

Vậy các x'_{ij} đã được tính xong. Nếu chú ý ta thấy rằng các phép tính này đã không dùng ma trận đảo của ma trận B, điều này sẽ làm số lượng tính toán giảm đi.

$$f(x') = f(x) - \frac{x_{s0}}{x_{sk}} \Delta_k = f(x) - \frac{x_{10}}{x_{14}} \Delta_4 = 22 - \frac{6}{4} 14 = 1 \text{ (dùng 2 lần}$$

tính: nhân và trừ). Nếu phải tính trực tiếp $f(x') = 1.0 - 2.0 + 2. \frac{1}{2} + 0. \frac{3}{2} = 1$ (dùng 3 phép cộng, 4 phép nhân) thì phép tính ở trên đã giảm đi 5 phép toán. Cuối cùng ta tính các Δ'_j , ta có

$$\Delta'_j = \sum_{s \neq i=1}^m c_i x'_{ij} + c_k x'_{kj} - c_j, j = \overline{1, n}$$

$$\Delta'_1 = c_3 x'_{31} + c_4 x'_{41} - c_1 = 2. \left(\frac{-5}{4} \right) + 0. \frac{1}{4} - 1 = \frac{-7}{2},$$

$$\Delta'_2 = c_3 x'_{32} + c_4 x'_{42} - c_2 = 2. \frac{3}{4} + 0. \frac{1}{4} - (-2) = \frac{7}{2},$$

$$\Delta'_3 = c_3 x'_{33} + c_4 x'_{43} - c_3 = 2.1 + 0.0 - 2 = 0,$$

$$\Delta'_4 = c_3 x'_{34} + c_4 x'_{44} - c_4 = 2.0 + 0.1 - 0 = 0.$$

Để thấy rõ hơn ta sắp xếp các phép tính toán trên lên bảng sau

			1	-2	2	0
Cơ sở	Hệ số c_j	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4
A1	1	6	1	1	0	[4]
A3	2	8	0	2	1	5
	$f(x)$	22	0	7	0	(14)
A4	0	3/2	1/4	1/4	0	1
A3	2	1/2	-5/4	3/4	1	0
	$f(x)$	1	-7/2	7/2	0	0

Việc tính toán đơn giản hơn. Khi so sánh biết được Δ_4 lớn nhất ta đánh ngoặc tròn Δ_4 để biết A^4 được đưa vào thay thế. Khi xác định được A^1 bị thay thế ta đánh ngoặc vuông phần tử x_{14} . Cột 4 được gọi là cột xoay, dòng 1 được gọi là dòng xoay. Bảng thứ hai được hình thành như sau:

Xem cột phương án là cột thứ 0, cột $x_1, \dots, x_4$ là cột thứ 1, ..., thứ 4. Khi đó bảng thứ nhất là một ma trận hai dòng 5 cột. Ta dùng phép biến đổi

sơ cấp để đưa cột 1 trở thành vectơ đơn vị thứ nhất, ta có bảng thứ hai. Việc tính toán các phần tử ở dòng cuối theo công thức (6).

6. Thuật toán đơn hình cho bài toán chính tắc có sẵn ma trận đơn vị:

Giải sử bài toán chính tắc

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

có chứa một ma trận đơn vị gồm m vectơ đầu tiên là $A^1, A^2, \dots, A^m$, và phương án cực biên x trong bước lặp đầu tiên là

$$x = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0) \geq 0.$$

Khi đó các x^j dễ dàng biểu diễn qua các vectơ cơ sở ở trên. Để thuận tiện cho việc tính toán ta sắp xếp các dữ liệu lên bảng sau mà ta gọi là bảng đơn hình.

			c_1	c_2		c_m	c_{m+1}	...	c_k		c_n
Cơ sở	H.số c_j	Ph. án	x_1	x_2		x_m	x_{m+1}	...	x_k		x_n
A^1	c_1	b_1	1	0		0	x_{1m+1}		x_{1k}		x_{1n}
A^2	c_2	b_2	0	1		0	x_{2m+1}		x_{2k}		x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A^s	c_s	b_s	0	0		0	x_{sm+1}		x_{sk}		x_{sn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A^m	c_m	b_m	0	0		1	x_{mm+1}		x_{mk}		x_{mn}
	$f(x)$	f_0	0	0		0	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Trong đó $A^1, A^2, \dots, A^m$ là các vectơ đơn vị ban đầu, đó cũng là hệ vectơ liên kết với phương án $x = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0) \geq 0$. $c_1, c_2, \dots, c_m$ là các hệ số đứng trước $x_1, x_2, \dots, x_m$ trong hàm mục tiêu. $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$ với $j = \overline{m+1, n}$ là cột thứ j của ma trận A. Các phần tử ở dòng cuối cùng tính theo công thức: $f_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$,

$\Delta_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} - c_j$, $j = \overline{1, n}$. Nhưng để tính được $\Delta_j = 0$, $j = \overline{1, m}$ tức là

các Δ_j ứng với các vectơ cơ sở bằng không. Sau khi đã tính toán xong các số liệu ở trên ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Nếu $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1, n}$ thì phương án đang xét là tối ưu (chú ý những ẩn nằm ngoài cơ sở bằng 0). Thuật toán kết thúc.

Nếu $\Delta_j > 0$ mà ứng với j này, $x_{ij} \leq 0, \forall i = \overline{1, m}$ thì bài toán không có phương án tối ưu (cụ thể là hàm mục tiêu không bị chặn dưới). Thuật toán kết thúc.

Nếu không rơi vào hai trường hợp trên, tức là $\Delta_j > 0$ mà ứng với mỗi $j, \exists i: x_{ij} > 0$ ta sẽ tìm một phương án cực biên khác tốt hơn phương án đang xét.

Bước 2:

i) Xác định $\Delta_k = \max\{\Delta_j / \Delta_j > 0\}$, véc tơ A^k đưa vào thay thế.

ii) Xác định véc tơ A^s đưa ra khỏi cơ sở như sau:

Lập tỷ số giữa các phần tử ở cột x^0 và các phần tử dương tương ứng ở cột x^k để chỉ ra tỷ số nhỏ nhất: $\min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ik}} : x_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sk}}$.

Cột k được gọi là cột xoay, dòng s được gọi là dòng xoay, phần tử x_{sk} được gọi là phần tử trục.

Bước 3: Tiếp theo ta lập bảng đơn hình mới với các dữ liệu được tính theo công thức (4). Trục quan hơn là:

+ Chia dòng s cho x_{sk} (số 1 sẽ xuất hiện ở vị trí trục).

+ Nhân dòng s cho $-x_{ik}$ rồi cộng vào dòng $i, i = \overline{1, m}, i \neq s$. Khi đó các phần tử ở cột k dòng khác s đều bằng 0.

Nói một cách đơn giản ta dùng phép biến đổi như phép biến đổi sơ cấp trên ma trận biến đổi sao cho cột k trở thành véc tơ đơn vị thứ s , tức là véc tơ có phần tử thứ s là 1 các phần tử khác bằng 0. (Lưu ý, không được áp dụng tất cả những phép biến đổi sơ cấp trên ma trận vào đây mà chỉ và chỉ dùng một phép biến đổi đã trình bày ở trên)

Bước 4: Quay lại bước 1. Tính các Δ_j, f theo các công thức (5), (6) và kiểm tra tính tối ưu.

Sau đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 1: Giải bài toán $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 2x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 & + 2x_4 + x_5 = 10 \\ x_2 & + x_4 + 3x_5 = 12 \\ & + x_3 + 3x_4 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Giải: Sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			-5	-4	0	0	2
Cơ sở	Hệ số c_j	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A1	-5	10	1	0	0	2	1
A2	-4	12	0	1	0	1	3
A3	0	15	0	0	1	3	1
	$f(x)$	-98	0	0	0	-14	-19

Bài toán đã có dấu hiệu tối ưu, phương án tối ưu là $x = (10, 12, 15, 0, 0)$, giá trị tối ưu -98.

Ví dụ 2: Giải bài toán

$$f(x) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Giải: Sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			-2	-4	1	-1	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph. án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A5	0	4	1	[3]	0	0	1	0
A6	0	3	2	1	-1	0	0	1
A4	-1	3	0	1	4	1	0	0
	$f(x)$	-3	2	(3)	-5	0	0	0
A2	-4	4/3	1/3	1	0	0	1/3	0
A6	0	5/3	[5/3]	0	-1	0	-1/3	1
A4	-1	5/3	-1/3	0	4	1	-1/3	0
	$f(x)$	-7	(1)	0	-5	0	-1	0
A2	-4	1	0	1	1/5	0	2/5	-1/5
A1	-2	1	1	0	-3/5	0	-1/5	3/5
A4	-1	2	0	0	19/5	1	-2/5	1/5
	$f(x)$	-8	0	0	-22/5	0	-4/5	-3/5

Chú thích: Ở bảng đơn hình thứ nhất ta thấy có $\Delta_1, \Delta_2 > 0$. So sánh thấy Δ_2 lớn hơn, vậy vectơ A^2 đưa vào thay thế (ta khoanh tròn số 3).

Tính

$$\min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i2}} : x_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{x_{50}}{x_{52}}, \frac{x_{60}}{x_{62}}, \frac{x_{40}}{x_{42}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{3}, \frac{3}{1}, \frac{3}{1} \right\} = \frac{4}{3}. \text{ Min đạt}$$

được ở chỉ số $s=5$, tức là dòng 1 là dòng xoay (hay cũng gọi là dòng của A^5 để không nhầm), và ta đóng ô vuông số 3). Phần tử 3 nằm ở dòng 1 cột 2 là phần tử trục.

Bảng đơn hình thứ hai được hình thành như sau: Thay A^2 cho A^5 và c_2 cho c_5 , A^6 ; A^4 , c_6 ; c_4 vẫn giữ nguyên. Dòng một của bảng thứ hai chính được thay bởi dòng một của bảng một sau khi đã chia cho 3 (phần tử trục). Sau đó ta nhân dòng này cho -1 và cộng vào dòng thứ hai, lại nhân dòng này cho -1 và cộng vào dòng thứ ba. (Nói một cách khác ta dùng phép biến đổi giống như sơ cấp biến đổi sao cho cột 2 trở thành vectơ đơn vị thứ 1, A^5 là vectơ đơn vị thứ nhất). Các phần tử nằm ở dòng cuối cùng là f và các Δ_j tính theo công thức. Cụ thể $f = (-4) \cdot \frac{4}{3} + 0 \cdot \frac{5}{3} + (-1) \frac{5}{3} = \frac{-21}{3} = -7$,

$$\Delta_1 = (-4) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{5}{3} + (-1) \left(-\frac{1}{3} \right) - (-2) = 1, \dots$$

Lúc này ta nhận thấy chỉ còn $\Delta_1 > 0$ và các x_{i1} có số dương. Ta khoanh tròn số $\Delta_1 = 1$, cột một là cột xoay. Tính

$$\min \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{i1}} : x_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{x_{20}}{x_{22}}, \frac{x_{60}}{x_{62}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{3} : \frac{1}{3}, \frac{5}{3} : \frac{5}{3} \right\} = 1. \text{ Min đạt}$$

được ở chỉ số $s=6$, tức là dòng 2 là dòng xoay (hay cũng gọi là dòng của A^6 để không nhầm), và ta đóng ô vuông số 5/3). Phần tử 5/3 nằm ở dòng 2 cột 1 là phần tử trục.

Bảng đơn hình thứ ba được hình thành tương tự như trên. Chia dòng hai cho 5/3, sau đó biến đổi sơ cấp để cột một trở thành vectơ đơn vị thứ hai. Sau đó tính toán f và các Δ_j ta thấy có dấu hiệu tối ưu. Thuật toán kết thúc. Phương án tối ưu là $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 1, 0, 2, 0, 0)$ và giá trị tối ưu là -8.

Ví dụ 3: Giải bài toán

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ 4x_1 + x_3 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

Giải: Đây không phải là bài toán chính tắc, ta sẽ đưa về bài toán chính tắc bằng cách thêm vào các ẩn phụ $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, bài toán trở thành

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 20 \\ 4x_1 + x_3 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			-2	3	-1	0	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph. án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A4	0	15	1	-5	1	1	0	0
A5	0	20	3	2	-2	0	1	0
A6	0	10	4	0	1	0	0	1
	$f(x)$	0	2	-3	1	0	0	0
A4	0	25/2	0	-5	3/4	1	0	-1/4
A5	0	25/2	0	2	-11/4	0	1	-3/4
A1	-2	5/2	1	0	1/4	0	0	1/4
	$f(x)$	-5	0	-3	1/2	0	0	-1/2
A4	0	5	-3	-5	0	1	0	-1
A5	0	40	11	2	0	0	1	2
A3	-1	10	4	0	1	0	0	1
	$f(x)$	-10	-2	-3	0	0	0	-1

Phương án tối ưu $X = (0, 0, 10, 5, 40, 0)$

Giá trị tối ưu $f = -10$.

Trường hợp bài toán $f(x) \rightarrow \max$ có thể đổi thành $-f(x) \rightarrow \min$ hoặc thay đổi dấu hiệu tối ưu với các định lý tương ứng sau

Định lý 1'. (Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ là một phương án cực biên của bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) \rightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

sao cho $\Delta_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$ thì x là phương án tối ưu.

Định lý 2': Nếu tồn tại vectơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ sao cho $\Delta_j < 0$ và $x^j \leq 0$ (nghĩa là $x_{ij} \leq 0, i = \overline{1, m}$) thì bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc không có phương án tối ưu. Rõ hơn là hàm mục tiêu không bị chặn trên trên tập phương án.

Định lý 3': Nếu tồn tại vectơ A^j ngoài cơ sở liên kết của phương án cực biên $x = (x_{10}; x_{20}; \dots; x_{m0}; 0; 0; \dots; 0)$ sao cho $\Delta_j < 0$, và với mỗi j mà $\Delta_j < 0$ ta luôn tìm được ít nhất một $x_{ij} > 0$, thì khi đó ta có thể tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn x , nghĩa là phương án này làm cho hàm mục tiêu lớn hơn phương án x .

Khi chọn vectơ cơ sở đưa vào ta chọn $\Delta_k = \min \{ \Delta_j / \Delta_j < 0 \}$, chọn vectơ đưa ra như trường hợp min.

Ví dụ 4: Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 5x_1 - x_2 - 19x_3 - 16x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Chúng minh $x = \left(\frac{25}{13}; \frac{64}{13}; 0; \frac{8}{13} \right)$ là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

Chúng ta có $x = \left(\frac{25}{13}; \frac{64}{13}; 0; \frac{8}{13} \right)$ đúng là một phương án, vì thỏa

mãn tất cả các ràng buộc của bài toán. Phương án này có hệ vectơ liên kết là $A^1 = (1, 2, -3); A^2 = (1, -1, 4); A^4 = (-3, 5, -8)$. Dễ thấy đây là hệ độc lập

tuyến tính nên x là phương án cực biên. Biểu diễn các vectơ A^1, A^2, A^3, A^4 theo hệ vectơ ở trên ta có:

$$A^1 = x_{11}A^1 + x_{21}A^2 + x_{41}A^4 = 1A^1 + 0A^2 + 0A^4,$$

$$A^2 = x_{12}A^1 + x_{22}A^2 + x_{42}A^4 = 0A^1 + 1A^2 + 0A^4,$$

$$A^3 = x_{13}A^1 + x_{23}A^2 + x_{43}A^4 = \frac{7}{13}A^1 + \frac{46}{13}A^2 + \frac{9}{13}A^4,$$

$$A^4 = x_{14}A^1 + x_{24}A^2 + x_{44}A^4 = 0A^1 + 0A^2 + 1A^4.$$

Từ đây ta có $x^1 = (1, 0, 0)$, $x^2 = (0, 1, 0)$, $x^3 = \left(\frac{7}{13}, \frac{46}{13}, \frac{9}{13}\right)$, $x^4 = (0, 0, 1)$,

và các ước lượng Δ_j sẽ là $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 = 0$,

$\Delta_3 = \langle c, x^3 \rangle - c_3 = 5 \cdot \frac{7}{13} - \frac{46}{13} - 16 \cdot \frac{9}{13} - (-19) = \frac{92}{13}$. Vậy theo định lý 1', x là phương án tối ưu.

Ví dụ 5: Giải bài toán

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

Giải: Đây không phải là bài toán chính tắc, ta sẽ đưa về bài toán chính tắc bằng cách thêm vào các ẩn phụ $x_4, x_5 \geq 0$ vào các bất phương trình thứ hai và thứ ba, bài toán trở thành

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			2	3	1	0	0
Cơ sở	H.s c_j	Ph. án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A3	1	6	1	-5	1	0	0
A4	0	7	2	2	0	1	0
A5	0	5	-1	[2]	0	0	1
	$f(x)$	6	-1	(-8)	0	0	0
A3	1	37/2	-3/2	0	1	0	5/2
A4	0	2	[3]	0	0	1	-1
A2	3	5/2	-1/2	1	0	0	1/2
	$f(x)$	26	(-5)	0	0	0	4
A3	1	39/2	0	0	1	1/2	2
A1	2	2/3	1	0	0	1/3	-1/3
A2	3	17/6	0	1	0	1/6	1/3
	$f(x)$	88/3	0	0	0	5/3	7/3

Phương án tối ưu là $X = (2/3, 17/6, 39/2, 0, 0)$

Giá trị tối ưu là $f = 88/3$.

7. Thuật toán đơn hình cho bài toán chính tắc không có sẵn ma trận đơn vị:

Giả sử bài toán chính tắc

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$Ax = b \quad (*)$$

$$x \geq 0$$

trong đó A không có ma trận đơn vị. Chẳng hạn bài toán sau đây

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 14x_4 = 11 \\ 3x_2 + x_3 + 14x_4 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Vì tập phương án là hệ phương trình tuyến tính nên có thể biến đổi để có ba véc-tơ đơn vị. Thật vậy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 2 & 1 & 0 & 14 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -12 & -17 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 3 & 1 & 14 & 16 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -22 & -35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 27/5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 16/5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 & 7 \end{pmatrix}$$

Bài toán lúc này trở thành

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{27}{5}x_4 = 4 \\ x_2 + \frac{16}{5}x_4 = 3 \\ x_3 + \frac{22}{5}x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Giải: Sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			3	-4	-5	6
Cơ sở	Hệ số c_j	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4
A1	3	4	1	0	0	27/5
A2	-4	3	0	1	0	16/5
A3	-5	7	0	0	1	22/5
	$f(x)$	-35	0	0	0	-123/5

Phương án tối ưu là $x = (4, 3, 7, 0)$. Giá trị tối ưu là $f = -35$.

Nhưng có thể trong quá trình biến đổi sau khi đã có các vectơ đơn vị mà phương án không thỏa điều kiện không âm thì cách làm trên rất khó gặp một phương án cực biên ban đầu. Ta dùng phương pháp sau đây gọi là phương pháp *đánh thuế* để giải cho trường hợp này.

Ta thêm các ẩn $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ mà ta sẽ gọi là ẩn giả (giả sử bài toán còn thiếu m vectơ đơn vị). Khi đó bài toán có dạng như sau:

$$f(x) + Mx_{n+1} + Mx_{n+2} + \dots + Mx_{n+m} \rightarrow \min$$

$$Bx = b \quad (M)$$

$$x \geq 0$$

Trong đó B là ma trận cấp $m \times (n+m)$ với n cột đầu là ma trận A , m cột sau là m vectơ đơn vị. x là vectơ có $n+m$ thành phần

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$. M là một số dương rất lớn; lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Ta có các kết quả sau.

Định lý 4:

a) Nếu bài toán (*) có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ của bài toán (M) phải có

$$(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) = (0, 0, \dots, 0).$$

b) Nếu bài toán (*) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì bài toán (M) có phương án tối ưu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots, 0)$ và ngược lại.

Khi giải bài toán (M) bằng phương pháp đơn hình thì các biểu thức f và Δ có chứa tham số M . Ở dòng cuối của bảng đơn hình ta chia làm hai dòng, dòng trên ghi các hệ số đứng trước M , dòng cuối ghi các hệ số tự do. $\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j$, vì M là số dương rất lớn nên khi so sánh các số Δ ta có quy ước sau:

$$\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_j < 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j < 0 \end{cases}$$

$$\Delta_j = \delta_j M + \gamma_j > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_j > 0, \forall \gamma_j \\ \delta_j = 0, \gamma_j > 0 \end{cases}$$

$$\Delta_k = \delta_k M + \gamma_k > \Delta_j = \delta_j M + \gamma_j \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_k > \delta_j \forall \gamma_k; \gamma_j \\ \delta_k = \delta_j, \gamma_k > \gamma_j \end{cases}$$

Ví dụ 5: Xét lại bài toán ở trên

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 14x_4 = 11 \\ 3x_2 + x_3 + 14x_4 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

Giải:

Đưa vào các ẩn giả x_5, x_6, x_7 ta có bài toán (M):

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 13x_4 + x_5 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 14x_4 + x_6 = 11 \\ 3x_2 + x_3 + 14x_4 + x_7 = 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}.$$

Lúc này ma trận A đã có sẵn một ma trận đơn vị, cho nên sắp xếp các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			3	-4	-5	6	M	M	M
Cơ sở	H.số c_j	Ph. án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A5	M	14	1	1	1	13	1	0	0
A6	M	11	2	1	0	[14]	0	1	0
A7	M	16	0	3	1	14	0	0	1
		41	3	5	2	(41)	0	0	0
		0	-3	4	5	-6	0	0	0
A5	M	53/14	-6/7	1/14	1	0	1	-13/14	0
A4	6	11/14	1/7	1/14	0	1	0	1/14	0
A7	M	5	-2	2	1	0	0	-1	1
		123/14	-20/7	29/14	2	0	0	-41/14	0
		33/7	-15/7	31/7	5	0	0	3/7	0
A5	M	101/28	-11/14	0	27/28	0	1	-25/28	-1/28
A4	6	17/28	3/14	0	-1/28	1	0	3/28	-1/28
A2	-4	5/2	-1	1	1/2	0	0	-1/2	1/2
		101/28	-11/14	0	27/28	0	0	-53/28	-29/28
		-89/14	16/7	0	39/14	0	0	37/14	-31/14
A3	-5	101/27	-22/27	0	1	0	28/27	-25/27	-1/27
A4	6	20/27	5/27	0	0	1	1/27	2/27	-1/27
A2	-4	17/27	-16/27	1	0	0	-14/27	-1/27	14/27
		0	0	0	0	0	-1	-1	-1
		-151/9	41/9	0	0	0	-26/9	47/9	-19/9
A3	-5	7	0	0	1	22/5	6/5	-3/5	-1/5
A1	3	4	1	0	0	27/5	1/5	2/5	-1/5
A2	-4	3	0	1	0	16/5	-2/5	1/5	2/5
		-35	0	0	0	0	-1	-1	-1
		0	0	0	0	-123/5	-19/5	17/5	-6/5

Phương án tối ưu là $X = (4, 3, 7, 0, 0, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $f = -35$.

Chú ý rằng các véc tơ A5, A6, A7 khi đã đưa ra thì không bao giờ đưa trở vào lại cho nên khi có một véc tơ đã đưa ra thì cột đó có thể không biến đổi nữa để giảm bớt tính toán.

Bài tập

1. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

2. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

3. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}.$$

4. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = -2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

5. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 + 4x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

6. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

7. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}.$$

8. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 15x_1 + 19x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 2}.$$

9. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}.$$

10. Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 5}.$$

11. Một Xí nghiệp xử lý giấy, có ba phân xưởng I, II, III cùng xử lý ba loại giấy A, B, C. Do ba phân xưởng có nhiều sự khác nhau, nên nếu cùng đầu tư 10 triệu đồng vào mỗi phân xưởng thì cuối kỳ phân xưởng I xử lý được 6 tạ giấy loại A, 1 tạ giấy loại B, 3 tạ giấy loại C. Trong khi đó phân xưởng II xử lý được 2 tạ giấy loại A, 7 tạ giấy loại B, 1 tạ giấy loại C. Phân xưởng III xử lý được 1 tạ giấy loại A, 3 tạ giấy loại B, 8 tạ giấy loại C. Theo yêu cầu lao động thì cuối kỳ Xí nghiệp phải xử lý ít nhất 2 tấn giấy loại A, 2,5 tấn giấy loại B, 3 tấn giấy loại C. Hỏi cần đầu tư vào mỗi phân xưởng bao nhiêu tiền để xí nghiệp thỏa

Hoàn thành công việc.

Giá tiền đầu tư là nhỏ nhất.

12. Một xí nghiệp dự định sản xuất ba loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế tạo từ ba loại nguyên liệu I, II, III và IV. Số lượng các nguyên liệu I, II, III và IV mà xí nghiệp có tối đa lần lượt là 380, 204, 120,

180. Số lượng các nguyên liệu cần để sản xuất một đơn vị sản phẩm A, B, C được cho ở bảng sau đây.

NL \ SP	I	II	III	IV
A	12	0	1	4
B	11	26	0	3
C	8	9	15	2

Xí nghiệp muốn lên một kế hoạch sản xuất để thu được tổng số lãi nhiều nhất (với giả thiết rằng các sản phẩm làm ra đều bán hết). Nếu biết rằng lãi 3 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại A, lãi 5 triệu đồng cho một đơn vị sản phẩm loại B và C.

Lập mô hình bài toán.

Tìm một phương án sao cho xí nghiệp có lãi nhiều nhất.

13. Một công ty sản xuất hai loại sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu để sản xuất gồm hai loại A, B với trữ lượng tương ứng là 16 tấn và 18 tấn. Để sản xuất 1 tấn sơn nội thất cần 1 tấn nguyên liệu A và 2 tấn nguyên liệu B. Để sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời cần 2 tấn nguyên liệu A và 3 tấn nguyên liệu B. Qua điều tra thị trường công ty biết rằng nhu cầu sơn nội thất không hơn sơn ngoài trời quá 1 tấn. Giá bán một tấn sơn nội thất là 4000 USD, giá bán một tấn sơn ngoài trời là 3000 USD. Khi sản xuất 1 tấn sơn nội thất phải bỏ ra một chi phí là 1300 USD, khi sản xuất 1 tấn sơn ngoài trời phải bỏ ra một chi phí là 1000 USD.

Hỏi cần sản xuất mỗi loại sơn bao nhiêu tấn để có lợi nhuận lớn nhất?

14. Giải lại các bài tập ở §1 và hãy chỉ rõ phương án tối ưu.

15. Chứng minh định lý 1. Chứng minh định lý 2.

16. Hỏi $x = \left(0; \frac{235}{92}; \frac{39}{92}; \frac{199}{92}\right)$ có phải là phương án tối ưu của bài toán

Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 0x_1 + 0x_2 - 7x_3 - 16x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9 \\ 4x_1 + 7x_2 - 8x_3 - 3x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

17. Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính mà ta gọi là bài toán (P)

$$f(x) = -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

a) Chứng minh $x = (0; 4; 2)$ là phương án cực biên, nhưng không phải là phương án tối ưu của bài toán (P).

b) Hãy xây dựng một phương án cực biên mới tốt hơn phương án x ở câu a).

Lời giải hoặc hướng dẫn

1. Sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			1	-2	2	0
Co So	CJ	Ph.An	x1	x2	x3	x4
A1	1	6	1	1	0	4
A3	2	8	0	2	1	5
			0	7	0	14
A4	0	3/2	1/4	1/4	0	1
A3	2	1/2	-5/4	3/4	1	0
			-7/2	7/2	0	0
A4	0	4/3	2/3	0	-1/3	1
A2	-2	2/3	-5/3	1	4/3	0
			7/3	0	-14/3	-0
A1	1	2	1	0	-1/2	3/2
A2	-2	4	0	1	1/2	5/2
			0	0	-7/2	-7/2

Nghiệm tối ưu $X = (2, 4, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $f = -6$.

2. Sắp xếp các các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			2	3	1	0	0	0
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A4	0	6	1	-5	1	1	0	0
A5	0	7	2	2	-2	0	1	0
A6	0	5	-1	2	1	0	0	1
			-2	-3	-1	0	0	0
A4	0	37/2	-3/2	0	7/2	1	0	5/2
A5	0	2	3	0	-3	0	1	-1
A2	3	5/2	-1/2	1	1/2	0	0	1/2
			-7/2	0	1/2	0	0	3/2
A4	0	39/2	0	0	2	1	1/2	2
A1	2	2/3	1	0	-1	0	1/3	-1/3
A2	3	17/6	0	1	0	0	1/6	1/3
			0	0	-3	0	7/6	1/3
A3	1	39/4	0	0	1	1/2	1/4	1
A1	2	125/12	1	0	0	1/2	7/12	2/3
A2	3	17/6	0	1	0	0	1/6	1/3
			0	0	0	3/2	23/12	10/3

Nghiệm tối ưu $X = (125/12, 17/6, 39/4, 0, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $f = 469/12$.

3. Thêm vào một ẩn phụ và sắp xếp các phân tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			2	1	1	3	0
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5
A1	2	16	1	2	1	0	0
A5	0	8	0	1	4	2	1
			0	3	1	-3	0

A1	2	16	1	2	1	0	0
A4	3	4	0	1/2	2	1	1/2
			0	9/2	7	0	3/2

Nghiệm tối ưu $X = (16, 0, 0, 4, 0)$

Giá trị tối ưu $f = 44$.

4. Giá trị tối ưu $f = -8$.

5. Giá trị tối ưu $f = 7$.

6.

			1	-7	-2	6	0	0	-M	-M
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A7	-M	10	1	3	1	1	-1	0	1	0
A8	-M	15	2	5	1	4	0	-1	0	1
	(M)		-3	-8	-2	-5	1	1	0	0
			-1	7	2	-6	0	0	0	0
A7	-M	1	-1/5	0	2/5	-7/5	-1	3/5	1	-3/5
A2	-7	3	2/5	1	1/5	4/5	0	-1/5	0	1/5
	(M)		1/5	0	-2/5	7/5	1	-3/5	0	8/5
			-19/5	0	3/5	-58/5	0	7/5	0	-7/5
A6	0	5/3	-1/3	0	2/3	-7/3	-5/3	1	5/3	-1
A2	-7	10/3	1/3	1	1/3	1/3	-1/3	0	1/3	0
	(M)		0	0	0	0	0	0	1	1
			-10/3	0	-1/3	-25/3	7/3	0	-7/3	0
A6	0	25	2	7	3	0	-4	1	4	-1
A4	6	10	1	3	1	1	-1	0	1	0
(M)			0	0	0	0	0	0	1	1
			5	25	8	0	-6	0	-6	0

Bài toán không có phương án tối ưu.

7. Thêm vào một ẩn giả và sắp xếp các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán ta có bảng sau:

			4	6	5	3	0	0	M	M
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A7	M	5	1	1	3	2	-1	0	1	0
A8	M	3	1	4	2	1	0	-1	0	1
	(M)		2	5	5	3	-1	-1	0	0
			-4	-6	-5	-3	0	0	0	0
A7	M	1/2	-1/2	-5	0	1/2	-1	3/2	1	-3/2
A3	5	3/2	1/2	2	1	1/2	0	-1/2	0	1/2
	(M)		-1/2	-5	0	1/2	-1	3/2	0	-5/2
			-3/2	4	0	-1/2	0	-5/2	0	5/2
A6	0	1/3	-1/3	-10/3	0	1/3	-2/3	1	2/3	-1
A3	5	5/3	1/3	1/3	1	2/3	-1/3	0	1/3	0
	(M)		0	0	0	0	0	0	-1	-1
			-7/3	-13/3	0	1/3	-5/3	0	5/3	0
A4	3	1	-1	-10	0	1	-2	3	2	-3
A3	5	1	1	7	1	0	1	-2	-1	2
	(M)		0	0	0	0	0	0	-1	-1
			-2	-1	0	0	-1	-1	1	1

Nghiệm tối ưu $X = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$.

Giá trị tối ưu $f = 8$.

11. Trong phần tóm tắt lý thuyết ở bài 1, bài toán này lập ra được bài toán Quy hoạch tuyến tính như sau:

Gọi x_1, x_2, x_3 (đơn vị 10 triệu đồng) lần lượt là số tiền đầu tư vào các phân xưởng I, II, III. Khi đó số tiền mà Xí nghiệp đầu tư là $f = x_1 + x_2 + x_3$.

Theo đề bài: phân xưởng I xử lý được $6x_1$ tạ giấy loại A, x_1 tạ giấy loại B, $3x_1$ tạ giấy loại C.

Phân xưởng II xử lý được $2x_2$ tạ giấy loại A, $7x_2$ tạ giấy loại B, x_2 tạ giấy loại C.

Phân xưởng III xử lý được x_3 tạ giấy loại A, $3x_3$ tạ giấy loại B, $8x_3$ tạ giấy loại C.

Theo yêu cầu lao động Xi nghiệp phải xử lý ít nhất 2 tấn giấy loại A nên $6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20$ và ít nhất 2.5 tấn giấy loại B, 3 tấn giấy loại C nên $x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25$ và $3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30$.

Vậy bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = x_1 + x_2 + x_3$ với các ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Thêm vào các ẩn giả x_4, x_5, x_6 sau đó sắp xếp lên bảng đơn hình và tính toán ta có kết quả:

			1	1	1	0	0	0	M	M	M
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A7	M	20	6	2	1	-1	0	0	1	0	0
A8	M	25	1	7	3	0	-1	0	0	1	0
A9	M	30	3	1	8	0	0	-1	0	0	1
	(M)		10	10	12	-1	-1	-1	0	0	0
			-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
A7	M	65/4	45/8	15/8	0	-1	0	1/8	1	0	-1/8
A8	M	55/4	-1/8	53/8	0	0	-1	3/8	0	1	-3/8
A3	1	15/4	3/8	1/8	1	0	0	-1/8	0	0	1/8
	(M)		11/2	17/2	0	-1	-1	1/2	0	0	-3/2
			-5/8	-7/8	0	0	0	-1/8	0	0	1/8
A7	M	655/53	300/53	0	0	-1	15/53	1/53	1	-15/53	-1/53
A2	1	110/53	-1/53	1	0	0	-8/53	3/53	0	8/53	-3/53
A3	1	185/53	20/53	0	1	0	1/53	-7/53	0	-1/53	7/53
	(M)		300/53	0	0	-1	15/53	1/53	0	-68/53	-54/53
			-34/53	0	0	0	-7/53	-4/53	0	7/53	4/53

A1	1	131/60	1	0	0	-53/300	1/20	1/300	53/300	-1/20	-1/300
A2	1	127/60	0	1	0	-1/300	-3/20	17/300	1/300	3/20	-17/300
A3	1	8/3	0	0	1	1/15	0	-2/15	-1/15	0	2/15
(M)	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	
	0	0	0	-17/150	-1/10	-11/150	17/150	1/10	11/150		

Nghiệm tối ưu $X = (131/60, 127/60, 8/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $f = 209/30$.

Nghĩa là Xí nghiệp nên đầu tư vào phân xưởng I, II, III lần lượt là 131/6, 127/6, 80/3 triệu đồng thì tổng số tiền đầu tư nhỏ nhất mà vẫn thỏa kế hoạch lao động.

12. Gọi x_1, x_2, x_3 theo thứ tự là số lượng sản phẩm A, B, C mà xí nghiệp sản xuất. Khi đó xí nghiệp sẽ sản xuất mức sản lượng x_1, x_2, x_3 sao cho biểu thức $f = 3x_1 + 5x_2 + 5x_3$ lớn nhất.

Do các nguyên liệu I, II, III, IV là có hạn nên ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned}
 &f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
 &\begin{cases} 12x_1 + 11x_2 + 8x_3 \leq 380 \\ 26x_2 + 9x_3 \leq 204 \\ x_1 + 15x_3 \leq 120 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 180 \end{cases} \\
 &x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}
 \end{aligned}$$

Thêm vào các ẩn phụ x_4, x_5, x_6, x_7 sau đó sắp xếp lên bảng đơn hình và tính toán ta có kết quả:

			3	5	5	0	0	0	0
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A4	0	380	12	11	8	1	0	0	0
A5	0	204	0	26	9	0	1	0	0
A6	0	120	1	0	15	0	0	1	0
A7	0	180	4	3	2	0	0	0	1

			-3	-5	-5	0	0	0	0
A4	0	3818/13	12	0	109/26	1	-11/26	0	0
A2	-5	102/13	0	1	9/26	0	1/26	0	0
A6	0	120	1	0	15	0	0	1	0
A7	0	2034/13	4	0	25/26	0	-3/26	0	1
			-3	0	-85/26	0	5/26	0	0
A4	0	3382/13	4571/390	0	0	1	-11/26	-109/390	0
A2	-5	66/13	-3/130	1	0	0	1/26	-3/130	0
A3	-5	8	1/15	0	1	0	0	1/15	0
A7	0	1934/13	307/78	0	0	0	-3/26	-5/78	1
			-217/78	0	0	0	5/26	17/78	0
A1	-3	101460/4571	1	0	0	390/4571	-165/4571	-109/4571	0
A2	-5	25548/4571	0	1	0	9/4571	172/4571	-108/4571	0
A3	-5	29804/4571	0	0	1	-26/4571	11/4571	312/4571	0
A7	0	280688/4571	0	0	0	-1535/4571	122/4571	136/4571	1
			0	0	0	155/653	60/653	99/653	0

Phương án tối ưu là: $X = (101460/4571, 25548/4571, 29804/4571, 0, 0, 0, 280688/4571,)$.

Giá trị tối ưu $f = 83020/653$.

Chương II

LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

§1. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa bài toán đối ngẫu:

Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính, ta gọi là bài toán (P)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_1) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I_2) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I_3) \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J_1) \quad (4)$$

$$x_j \leq 0 \quad (j \in J_2) \quad (5)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad (j \in J_3) \quad (6).$$

Bài toán gọi là (Q) sau đây được gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán (P)

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \langle b, y \rangle \rightarrow \max$$

$$y_i \leq 0 \quad (i \in I_1) \quad (1')$$

$$y_i \geq 0 \quad (i \in I_2) \quad (2')$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad (i \in I_3) \quad (3')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j \in J_1) \quad (4')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j \in J_2) \quad (5')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad (j \in J_3) \quad (6')$$

Trong đó các cặp ràng buộc (1)–(1'), (2)–(2'), ..., (6)–(6') được gọi là các ràng buộc đối ngẫu với nhau.

Ví dụ: Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính (P)

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 5x_2 & -3x_5 \leq 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_3 - 4x_4 & -5x_5 \leq -2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 & \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 & = 17 \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1; x_3 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$x_4; x_5 \leq 0 \quad (7).$$

Ta sẽ viết bài toán đối ngẫu của bài toán (P). Trước tiên ta sẽ chỉ rõ các véc tơ c , b và ma trận A cũng như các tập chỉ số:

$$c = (4; 3; -7; 1; -1), b = (5; -2; 1; 17)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = \{1; 3\}, J_2 = \{4; 5\}, J_3 = \{2\}.$$

Bài toán đối ngẫu (Q) là:

$$g(y) = 5y_1 - 2y_2 + y_3 + 17y_4 \rightarrow \max$$

$$y_1; y_2 \leq 0, \quad (1')$$

$$y_3 \geq 0, \quad (2')$$

$$y_4 \in \mathbb{R}, \quad (3')$$

$$\begin{cases} 12y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq 4 \end{cases} \quad (4')$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 0y_2 + y_3 + 4y_4 = 3 \end{cases} \quad (5')$$

$$\begin{cases} -y_2 + y_3 - 5y_4 \leq -7 \end{cases} \quad (6')$$

$$\begin{cases} -4y_2 - 2y_3 + y_4 \geq 1 \end{cases} \quad (7')$$

$$\begin{cases} -3y_1 - 5y_2 \geq -1 \end{cases} \quad (8').$$

Giải thích: (1') do ràng buộc (1), (2) của bài toán gốc. (2') do ràng buộc (3) của bài toán gốc. (3') do ràng buộc (4) của bài toán gốc. Ràng buộc (4') của bài toán đối ngẫu do điều kiện (5) là $x_1 \geq 0$ của bài toán gốc. Ràng buộc (5') của bài toán đối ngẫu do điều kiện (6) là $x_2 \in \mathbb{R}$ của bài toán gốc. Ràng buộc (6') của bài toán đối ngẫu do điều kiện (5) là $x_3 \geq 0$ của bài toán gốc.

Ràng buộc (7'), (8') của bài toán đối ngẫu do điều kiện (7) là $x_4; x_5 \leq 0$ của bài toán gốc.

Tương tự cặp bài toán sau đây được gọi là cặp bài toán đối ngẫu.
 Bài toán (P):

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I_1) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I_2) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I_3) \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J_1) \quad (4)$$

$$x_j \leq 0 \quad (j \in J_2) \quad (5)$$

$$x_j \in \mathbb{R} \quad (j \in J_3) \quad (6).$$

Bài toán (Q):

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \langle b, y \rangle \rightarrow \min$$

$$y_i \geq 0 \quad (i \in I_1) \quad (1')$$

$$y_i \leq 0 \quad (i \in I_2) \quad (2')$$

$$y_i \in \mathbb{R} \quad (i \in I_3) \quad (3')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j \in J_1) \quad (4')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j \in J_2) \quad (5')$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad (j \in J_3) \quad (6')$$

Từ đó ta thấy rằng đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc ban đầu.
 Có thể tóm tắt các ràng buộc của bài toán gốc và đối ngẫu trong bảng sau đây:

Bài toán gốc	Chỉ số	Bài toán đối ngẫu
$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$		$g(y) = \langle b, y \rangle \rightarrow \max$
$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$	$i \in I_1$	$y_i \leq 0$
$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$	$i \in I_2$	$y_i \geq 0$
$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	$i \in I_3$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	$j \in J_1$	$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$j \in J_2$	$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j \in J_3$	$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$

2. Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu:

Trong phần này ta chỉ xét bài toán gốc dạng min.

2.1. Định lý 1: Cho x, y theo thứ tự là phương án của bài toán gốc và đối ngẫu ta có $f(x) \geq g(y)$ hay tương đương $\langle c, x \rangle \geq \langle b, y \rangle$.

Từ đó nếu tìm được $\bar{x}, \bar{y}$ theo thứ tự là phương án của bài toán gốc và đối ngẫu sao cho $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle$ thì $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu của các bài toán gốc và đối ngẫu.

2.2. Định lý 2: Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều có tập phương án không rỗng thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau.

Từ đó nếu một trong hai bài toán gốc hoặc đối ngẫu có tập phương án khác rỗng và hàm mục tiêu không bị chặn (không bị chặn dưới nếu là bài toán min, không bị chặn trên nếu là bài toán max) thì bài toán còn lại có tập phương án bằng rỗng.

2.3. Định lý 3: Giả sử $\bar{x}$ là một phương án của bài toán gốc (P)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I')$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J)$$

Khi đó, để $\bar{x}$ là phương án tối ưu của bài toán (P) điều kiện cần và đủ là tồn tại vectơ $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \leq c_j \quad (j \in J(\bar{x}))$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i = c_j \quad (j \notin J(\bar{x}))$$

$$\bar{y}_i \geq 0 \quad (i \in I(\bar{x}))$$

$$\bar{y}_i = 0 \quad (i \notin I(\bar{x}))$$

Trong đó $I(\bar{x}) = \left\{ i \in I : \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \right\}$, $J(\bar{x}) = \{ j \in J : \bar{x}_j = 0 \}$.

Ví dụ: Xét xem $\bar{x} = (3, 5, -2, 0)$ có phải là phương án tối ưu của bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 7x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \geq -10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 4; x_3 \in \mathbb{R}.$$

Giải:

Trước tiên ta chỉ rõ một số tập hợp:

$I = \{2, 3\}$; $I' = \{1\}$; $J = \{1, 2, 4\}$. Từ $\bar{x}_4 = 0$ suy ra

$J(\bar{x}) = \{ j \in J : \bar{x}_j = 0 \} = \{4\}$. Thay $\bar{x} = (3, 5, -2, 0)$ vào hai bất phương trình thứ 2, thứ 3 ta có

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 - \bar{x}_4 = 3 - 5 + 4(-2) - 0 = -10.$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2\bar{x}_3 + 6\bar{x}_4 = 12 > 6.$$

$$\text{Vậy } I(\bar{x}) = \left\{ i \in I : \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \right\} = \{2\} \Rightarrow I \setminus I(\bar{x}) = \{3\}.$$

Véc tơ $\bar{x} = (3, 5, -2, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán khi tồn tại véc tơ $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$\begin{cases} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 7 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 1 \\ -4\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3 = -3 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + 6\bar{y}_3 \leq 0 \\ \bar{y}_2 \geq 0, \bar{y}_3 = 0 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu và $\bar{y}_3 = 0$ ta có $\bar{y}_1 = 4, \bar{y}_2 = 3$. Các nghiệm này không thỏa phương trình thứ ba. Vậy hệ đã cho vô nghiệm. Nói cách khác không tồn tại $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ thỏa hệ ở trên. Tóm lại, phương án $\bar{x} = (3, 5, -2, 0)$ không phải là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

2.4. Định lý 4: Nếu một trong hai bài toán (gốc hoặc đối ngẫu) có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu là bằng nhau.

2.5. Định lý 5: (Định lý độ lệch bù) Các phương án $\bar{x}, \bar{y}$ của bài toán gốc và đối ngẫu đều là phương án tối ưu điều kiện cần và đủ là

$$\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = 0$$

Hoặc tương đương (kết quả có được sau đây là do tích vô hướng hai véc tơ)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m (b_i - \langle A_i, \bar{x} \rangle) \bar{y}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^n (c_j - \langle A^j, \bar{y} \rangle) \bar{x}_j = 0 \end{cases}$$

Hoặc tương đương (kết quả có được sau đây là do dấu của từng cặp đối ngẫu)

$$\begin{cases} (b_i - \langle A_i, \bar{x} \rangle) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ (c_j - \langle A^j, \bar{y} \rangle) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Trong đó A_i, A^j theo thứ tự là véc tơ dòng thứ i và cột j của ma trận A . Hệ cuối cũng có thể viết rõ hơn như sau

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Như vậy từ định lý độ lệch bù này ta thấy rằng nếu biết $\bar{x}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc thì dễ dàng tìm được $\bar{y}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và ngược lại.

Ví dụ: Bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases} \quad (P)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

có phương án tối ưu là $\bar{x} = (2, 4, 0, 0)$ và giá trị tối ưu là -6 . Bài toán đối ngẫu của nó là:

$$g(y) = 6y_1 + 8y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 \leq 1 \\ y_1 + 2y_2 \leq -2 \\ y_2 \leq 2 \\ 4y_1 + 5y_2 \leq 0 \end{cases} \quad (Q)$$

$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

Phương án tối ưu của bài toán (Q) được tìm từ hệ phương trình

$$\begin{cases} (6 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 4\bar{x}_4)) \bar{y}_1 = 0 \\ (8 - (2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + 5\bar{x}_4)) \bar{y}_2 = 0 \\ (1 - (\bar{y}_1 + 0 \cdot \bar{y}_2)) \bar{x}_1 = 0 \\ (-2 - (\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2)) \bar{x}_2 = 0 \\ (2 - (0 \cdot \bar{y}_1 + \bar{y}_2)) \bar{x}_3 = 0 \\ (0 - (4\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2)) \bar{x}_4 = 0 \end{cases}$$

Thế các giá trị của $\bar{x}$ đã biết vào hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} (6 - (2 + 4 + 4.0)) \bar{y}_1 = 0 \\ (8 - (2.4 + 0 + 5.0)) \bar{y}_2 = 0 \\ (1 - (\bar{y}_1 + 0.\bar{y}_2)) 2 = 0 \\ (-2 - (\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2)) 4 = 0 \\ (2 - (0.\bar{y}_1 + \bar{y}_2)) 0 = 0 \\ (0 - (4\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2)) 0 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 1 - (\bar{y}_1 + 0.\bar{y}_2) = 0 \\ -2 - (\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = 1 \\ \bar{y}_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta xét lại bài tập 11 ở §4 chương 1.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Đối ngẫu của bài toán này là bài toán sau

$$g(y) = 20y_1 + 25y_2 + 30y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1 + 3y_2 + 8y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

Đưa vào một số ẩn phụ sau đó sắp xếp lên bảng đơn hình tính toán ta được:

			20	25	30	0	0	0
Co So	CJ	Ph.An	y1	y2	y3	y4	y5	y6
A4	0	1	6	1	3	1	0	0
A5	0	1	2	7	1	0	1	0
A6	0	1	1	3	8	0	0	1
			-20	-25	-30	0	0	0
A4	0	5/8	45/8	-1/8	0	1	0	-3/8

A5	0	7/8	15/8	53/8	0	0	1	-1/8
A3	30	1/8	1/8	3/8	1	0	0	1/8
			-65/4	-55/4	0	0	0	15/4
A1	20	1/9	1	-1/45	0	8/45	0	-1/15
A5	0	2/3	0	20/3	0	-1/3	1	0
A3	30	1/9	0	17/45	1	-1/45	0	2/15
			0	-127/9	0	26/9	0	8/3
A1	20	17/150	1	0	0	53/300	1/300	-1/15
A2	25	1/10	0	1	0	-1/20	3/20	0
A3	30	11/150	0	0	1	-1/300	-17/300	2/15
			0	0	0	131/60	127/60	8/3

Phương án tối ưu là $\bar{y} = (17/150, 1/10, 11/150, 0, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $g = 209/30$.

Nhận thấy rằng việc giải bài toán đối ngẫu dễ hơn so với bài toán gốc. Bây giờ dùng định lý độ lệch bù ta suy lại phương án tối ưu của bài toán gốc. Thay các giá trị đã biết vào hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Ta được

$$\begin{cases} (20 - (6\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3)) \bar{y}_1 = 0 \\ (25 - (\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3)) \bar{y}_2 = 0 \\ (30 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 8\bar{x}_3)) \bar{y}_3 = 0 \\ (1 - (6\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3)) \bar{x}_1 = 0 \\ (1 - (2\bar{y}_1 + 7\bar{y}_2 + \bar{y}_3)) \bar{x}_2 = 0 \\ (1 - (\bar{y}_1 + 3\bar{y}_2 + 8\bar{y}_3)) \bar{x}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \left(20 - (6\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3)\right) \frac{17}{150} = 0 \\ \left(25 - (\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3)\right) \frac{1}{10} = 0 \\ \left(30 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 8\bar{x}_3)\right) \frac{11}{150} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \left(1 - \left(6 \cdot \frac{17}{150} + \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{11}{150}\right)\right) \bar{x}_1 = 0 \\ \left(1 - \left(2 \cdot \frac{17}{150} + 7 \cdot \frac{1}{10} + \frac{11}{150}\right)\right) \bar{x}_2 = 0 \\ \left(1 - \left(\frac{17}{150} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{11}{150}\right)\right) \bar{x}_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 20 - (6\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3) = 0 \\ 25 - (\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3) = 0 \\ 30 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 8\bar{x}_3) = 0 \\ 0 \cdot \bar{x}_1 = 0 \\ 0 \cdot \bar{x}_2 = 0 \\ 0 \cdot \bar{x}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{131}{60} \\ \bar{x}_2 = \frac{127}{60} \\ \bar{x}_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết quả này giống với kết quả đã biết, và giá trị tối ưu cũng là $f=209/30$.

Chú thích: Qua việc giải một số hệ phương trình trên ta thấy rằng trong hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j\right) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i\right) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

nếu có một thừa số khác không thì thừa số còn lại phải bằng không.

Như vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tìm từ định lý độ lệch bù, ta cũng có thể tìm phương án tối ưu nhờ vào định lý sau đây.

2.6. Định lý 6: Cho bài toán gốc dạng chính tắc (P). Bài toán gốc (P) đã giải bằng phương pháp đơn hình và đã xuất hiện dấu hiệu tối ưu. Phương án tối ưu $\bar{x}$ tìm được có cơ sở liên kết gồm m vectơ $A^1, A^2, \dots, A^m$ (m vectơ này

xuất phát từ ma trận A, hay trong bảng đơn hình đầu). Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\bar{y}$ được tính theo công thức

$$\bar{y} = cB^{-1}$$

Trong đó c là vectơ có các thành phần c_j tương ứng của phương án tối ưu $\bar{x}$, B là ma trận có các cột là các vectơ $A^1, A^2, \dots, A^m$ đã nói trên.

Ví dụ 1: Trở lại bài toán của ví dụ trên đây. Chúng ta đã biết đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc ban đầu. Do đó phương án tối ưu của bài toán gốc là $\bar{x} = cB^{-1}$, trong đó $c = (20, 25, 30)$ là các hệ số tương ứng của phương án tối ưu.

$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ là ma trận có các cột là các vectơ liên kết với phương án

tối ưu. Vậy $\bar{x} = (20, 25, 30) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\frac{1}{300} (20, 25, 30) \begin{pmatrix} 53 & 1 & -20 \\ -15 & 45 & 0 \\ -1 & -17 & 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{300} (655, 635, 800) = \left(\frac{131}{60}, \frac{127}{60}, \frac{8}{3} \right).$$

Ví dụ 2: Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính (P)

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 25 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 4.$$

Giải bài toán (P) bằng phương pháp đơn hình ta có (sau khi đã thêm các ẩn phụ).

			2	-3	4	1	0	0
Co So	CJ	Ph.An	x1	x2	x3	x4	x5	x6

A5	0	10	0	-1	3	1	1	0
A1	2	25	1	1	3	0	0	0
A6	0	16	0	2	1	5	0	1
			0	5	2	-1	0	0
A5	0	34/5	0	-7/5	14/5	0	1	-1/5
A1	2	25	1	1	3	0	0	0
A4	1	16/5	0	2/5	1/5	1	0	1/5
			0	27/5	11/5	0	0	1/5

Phương án tối ưu là $X = (25, 0, 0, 16/5, 34/5, 0)$
 Giá trị tối ưu $f = 266/5$.

Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\bar{y} = cB^{-1}$. Trong đó c là vectơ có các thành phần c_j tương ứng của phương án tối ưu $c=(2,1,0)$, B là ma trận có các cột là các vectơ liên kết với phương án tối ưu

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

cột 1 ứng với vectơ A1, cột 2 ứng với vectơ A4, cột 3 ứng với vectơ A5 trong bảng đơn hình đầu. Vậy

$$\bar{y} = cB^{-1} = (2,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = (2,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} = \left(0, 2, \frac{1}{5}\right), \text{ và giá}$$

$$\text{trị tối ưu là } \frac{266}{5} = g(\bar{y}) = 10.\bar{y}_1 + 25.\bar{y}_2 + 16.\bar{y}_3 = 10.0 + 25.2 + 16.\frac{1}{5}.$$

Tuy nhiên cũng có thể theo thứ tự của bảng đơn hình cuối cùng ta suy ra phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu như sau: $c=(0,2,1)$, B là ma trận có các cột là các vectơ liên kết với phương án tối ưu (theo thứ tự A5, A1, A4)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

cột 1 ứng với vectơ A5, cột 2 ứng với vectơ A1, cột 3 ứng với vectơ A4 trong bảng đơn hình đầu. Vậy

$$\bar{y} = cB^{-1} = (0, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \left(0, 2, \frac{1}{5}\right), \text{ và giá trị tối ưu là}$$

$$\frac{266}{5} = g(\bar{y}) = 10.\bar{y}_1 + 25.\bar{y}_2 + 16.\bar{y}_3 = 10.0 + 25.2 + 16.\frac{1}{5}.$$

Điều này có được vì ta có:

2.7. Mệnh đề 1: Cho $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ và $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ là ma trận vuông khả nghịch, B_j là cột j của B . Khi đó ta có:

$$cB^{-1} = c_{\sigma} (B_{\sigma})^{-1}$$

Trong đó $c_{\sigma} = (c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)})$ là một hoán vị của c , và tương ứng với phép hoán vị σ , $B_{\sigma} = (B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \dots, B_{\sigma(n)})$ là một hoán vị của B .

Tuy nhiên phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tìm dễ dàng hơn khi ta chứng minh định lý 6. Cách chứng minh để có được công thức chúng ta sẽ thấy trong phần bài tập, ở đây chúng ta chỉ cần chú ý đến kết quả cuối cùng, cũng như cách tính toán.

2.8. Định lý 7: Giả sử $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}$ là cơ sở đơn vị liên kết của phương án cực biên xuất phát của bài toán gốc dạng chính tắc. Khi đó phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tính theo công thức:

$$\bar{y} = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m})$$

Trong đó $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m}$ là các ước lượng tương ứng với các cột $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}$ xuất hiện ở bảng đơn hình cuối cùng khi đã có dấu hiệu tối ưu và $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m}$ là các hệ số của $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$.

Ví dụ: Trở lại ví dụ 2 trên đây ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là A^5, A^1, A^6 . Ta có $A^5 = A^{j_1} = E^1, A^1 = A^{j_2} = E^2, A^6 = A^{j_3} = E^3$. Ba hệ số đứng trước x_5, x_1, x_6 là $c_5 = c_{j_1} = 0, c_1 = c_{j_2} = 2, c_6 = c_{j_3} = 0$. Các ước lượng Δ_j ở bảng đơn hình cuối là $\Delta_{j_1} = \Delta_5 = 0, \Delta_{j_2} = \Delta_1 = 0, \Delta_{j_3} = \Delta_6 = \frac{1}{5}$.

Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m}) = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \Delta_{j_3} + c_{j_3}) \\ &= \left(0 + 0, 0 + 2, \frac{1}{5} + 0\right) = \left(0, 2, \frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

§2. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

1. Giới thiệu chung:

Phương án cũng như giá trị tối ưu của bài toán đối ngẫu đã hoàn tất bằng phương pháp đơn hình ở chương 1 và định lý độ lệch bù ở bài 1 chương 2, tuy nhiên cũng có thể tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu nhờ thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Ta xét bài toán gốc dạng chính tắc và bài toán đối ngẫu của nó

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax = b \quad (P),$$

$$x \geq 0$$

$$g(y) = \langle b, y \rangle \rightarrow \max$$

$$yA \leq c \quad (Q).$$

$$y \in \mathbb{R}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$. Ký hiệu đã biết $A_i, A^j, \langle \rangle$ theo thứ tự là vectơ dòng i , cột j của A , và tích vô hướng hai vectơ.

1.1. Định nghĩa 1: Giả sử hệ vectơ $A^1, A^2, \dots, A^m$ độc lập tuyến tính. Khi đó nếu có phương án $\bar{y}$ của bài toán đối ngẫu thỏa $\langle A^j, \bar{y} \rangle = c_j, j = \overline{1, m}$

thì hệ $A^1, A^2, \dots, A^m$ được gọi là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được.

Khi đó $\bar{y}$ là phương án cực biên của bài toán đối ngẫu (bài 3, chương 1).

1.2. Định nghĩa 2: Với phương án cực biên $\bar{y}$ nói ở định nghĩa 1, ta gọi vectơ $\bar{x} = (x^0, 0)$ trong đó $x^0 = B^{-1}b$ là giả phương án của bài toán gốc ($B = [A^1, A^2, \dots, A^m]$).

1.3. Định lý 1: Nếu $x^0 = B^{-1}b = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) \geq 0$ thì $\bar{y}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và $\bar{x} = (x^0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc. Trong đó $\bar{y} = cB^{-1}$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

1.4. Định lý 2: Nếu tồn tại chỉ số i sao cho $x_{i0} < 0$ và $x_{ij} \geq 0, j = \overline{1, n}$ thì bài toán đối ngẫu không bị chặn trên, khi đó bài toán gốc có tập phương án bằng rỗng.

1.5. Định lý 3: Nếu tồn tại chỉ số i sao cho $x_{i0} < 0$, và với mỗi i mà $x_{i0} < 0$ tồn tại j sao cho $x_{ij} < 0$ thì có thể xây dựng một phương án cực biên mới của bài toán đối ngẫu tốt hơn phương án hiện tại $\bar{y}$.

2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu:

Ta giả sử bài toán dạng chính tắc gốc có sẵn một cơ sở đơn vị là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Lập bảng đơn hình như bảng đơn hình gốc. Thuật toán đơn hình đối ngẫu được thực hiện qua một số bước sau.

- 1) Sau khi đã lập bảng đơn hình ta tính $\Delta_j = \langle c^0, x^j \rangle - c_j, j = \overline{1, n}$; và

$$\langle c^0, x^0 \rangle. \text{ Ký hiệu } x^j = A^j.$$

- 2) Nếu $x^0 \geq 0$ thì $\bar{x} = (x^0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và dẫn đến $\bar{y} = cB^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Nếu tồn tại chỉ số i sao cho $x_{i0} < 0$ và $x_{ij} \geq 0, j = \overline{1, n}$ thì bài toán đối ngẫu không bị chặn trên, khi đó bài toán gốc có tập phương án bằng rỗng. Kết thúc thuật toán.

- 3) Ngược lại với bước 2 chọn $x_{s0} = \min \{x_{i0} < 0 : i = \overline{1, m}\}$, A^s bị loại

$$\text{ra khỏi cơ sở. Chọn } \theta = \min \left\{ \frac{\Delta_j}{x_{sj}} : x_{sj} < 0; j = \overline{1, n} \right\} = \frac{\Delta_k}{x_{sk}},$$

véc tơ A^k được đưa vào thay cho A^s .

- 4) Biến đổi bảng đơn hình. Biến đổi cột k trở thành véc tơ đơn vị như A^s (dùng phép biến đổi sơ cấp).

- 5) Lúc này ta có giả phương án mới kiểm tra tính tối ưu của giả phương án này như bước 2.

Ví dụ: Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu giải bài toán

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Giải: Đưa vào hai ẩn phụ $x_5, x_6 \geq 0$, bài toán gốc với các ràng buộc có thể viết thành

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -6 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = -9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Sắp xếp các phân tử lên bảng đơn hình sau đó tính toán bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta được

			1	2	3	4	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A5	0	-6	-1	-1	-1	-4	1	0
A6	0	(-9)	[-4]	-1	-1	-1	0	1
		0	-1	-2	-3	-4	0	0
A5	0	(-15/4)	0	-3/4	-3/4	[-15/4]	1	-1/4
A1	1	9/4	1	1/4	1/4	1/4	0	-1/4
		9/4	0	-7/4	-11/4	-15/4	0	-1/4
A4	4	1	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15
A1	1	2	1	1/5	1/5	0	1/15	-4/15
		6	0	-1	-2	0	-1	0

Giải thích: Bài toán đối ngẫu là: $g(y) = -6y_1 - 9y_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ -y_1 - y_2 \leq 2 \\ -y_1 - y_2 \leq 3 \\ -4y_1 - y_2 \leq 4 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ y_1, y_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ta có phương án $\bar{y} = (0, 0)$ của bài toán đối ngẫu thỏa $\langle A^j, \bar{y} \rangle = c_j, j = 5; 6$ do đó A^5, A^6 là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Ứng với nó ta có giả phương án ban đầu là $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, -6, -9)$. Vậy ta có phần 1 bảng đơn hình.

Ở bước lặp đầu ta thấy $x^0 = (-6, -9) < 0$, nhưng các phần tử ở các dòng tương ứng có phần tử âm. $x_{s0} = \min\{x_{i0} < 0 : i = \overline{1, m}\} = \min\{-6, -9\} = -9 = x_{60}$, do đó A^6 bị loại ra khỏi cơ sở. Tính $\theta = \min\left\{\frac{\Delta_j}{x_{6j}} : x_{6j} < 0; j = \overline{1, 6}\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-4}, \frac{-2}{-1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-4}{-1}\right\} = \frac{-1}{-4} = \frac{\Delta_1}{x_{61}}$, dẫn đến đưa A^1 vào thay cho A^6 . Thực hiện phép biến đổi xung quanh phần tử x_{61} bằng -4 . Chia dòng thứ hai cho -4 , nhân dòng này cho 1 và cộng vào dòng thứ một ta được bảng đơn hình với phần thứ hai.

Ở bước lặp thứ hai ta thấy $x^0 = \left(\frac{-15}{4}, \frac{9}{4}\right)$ còn duy nhất

$x_{50} = \frac{-15}{4} < 0$, và các phần tử ở dòng này có phần tử âm. Ta có A^5 bị loại ra khỏi cơ sở, tìm vectơ đưa vào

$$\theta = \min\left\{\frac{\Delta_j}{x_{5j}} : x_{5j} < 0; j = \overline{1, 6}\right\} = \min\left\{\frac{-7/4}{-3/4}, \frac{-11/4}{-3/4}, \frac{-15/4}{-15/4}, \frac{-1/4}{-1/4}\right\} = \frac{-15/4}{-15/4} = \frac{\Delta_4}{x_{54}}.$$

(có hai giá trị để đạt min, ta chọn theo thứ tự). Từ đó ta đưa A^4 vào thay cho A^5 . Thực hiện phép biến đổi xung quanh phần tử x_{54} ta được phần ba bảng đơn hình.

Ở phần này ta được $x^0 = (1, 2) \geq 0$. Kết thúc thuật toán và ta có phương án tối ưu của bài toán gốc là $\bar{x} = (2, 0, 0, 1)$ giá trị tối ưu là 6 .

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\bar{y} = cB^{-1} = (4, 1) \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} (4, 1) \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = (-1, 0).$$

Ở ví dụ này ta thấy cơ sở đối ngẫu chấp nhận được là có ngay, việc tìm không khó khăn. Bây giờ ta xét trường hợp chưa biết cơ sở đối ngẫu chấp nhận được, nhưng đã biết được một hệ gồm m vectơ độc lập tuyến tính $A^1, A^2, \dots, A^m$. Khi đó vấn đề sẽ giải quyết như sau.

Thêm vào hệ ràng buộc của bài toán gốc một ẩn giả tạo $x_0 \geq 0$ và một ràng buộc giả tạo $x_0 + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n = M$. Bài toán gốc với ràng buộc mới này được gọi là bài toán gốc mở rộng, với M là số dương rất lớn. Cụ thể là bài toán

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle c, x \rangle \rightarrow \min \\ x_0 + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n &= M \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Ma trận các hệ số của hai ràng buộc ở trên được ký hiệu là $A^* = [A^{0*}, A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{n*}]$. Dễ thấy hệ $A^{0*}, A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{n*}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^{m+1}$ (A^{0*} là một vectơ đơn vị nên định thức của A^* chính là định thức của $[A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{n*}]$ khác không (công thức Laplace)).

Đặt: $B^* = [A^{0*}, A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{m*}]$, $x^{*j} = (B^*)^{-1} A^{*j}$; ($j = \overline{0, n}$),
 $x^{*0} = (B^*)^{-1} b^*$, với $b^* = \begin{pmatrix} M \\ b \end{pmatrix}$ (chú ý b là vectơ cột, b^* có $m+1$ thành phần); $c^{*0} = (0, c_1, c_2, \dots, c_m)$. Ta lập bảng đơn hình ứng với cơ sở $A^{0*}, A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{m*}$ (giả sử đây là cơ sở đơn vị)

			0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+}	...	c_k		c_n
Cơ sở	H.số c	Ph. át	x^{*0}	x^{*1}	x^{*2}	...	x^{*m}	x^{*m+}	...	x^{*k}		x^{*n}
A^{*0}	c_0	M	1	0	0		0	1		1		1
A^{*1}	c_1	x_{10}^*	0	1	0		0	x_{1m}^*		x_{1k}^*		x_{1n}^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A^{*s}	c_s	x_{s0}^*	0	$\vdots$	0		0	x_{sm}^*		x_{sk}^*		x_{sn}^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A^{*m}	c_m	x_{m0}^*	0	0	0		1	x_{mm}^*		x_{mk}^*		x_{mn}^*
				0	0		0	Δ_{m+}^*		Δ_k^*		Δ_n^*

Ta có một số kết quả sau đây:

$\Delta_j^* \leq 0, \forall j$ thì cơ sở đang xét là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Nếu lại nếu tồn tại $j: m+1 \leq j \leq n$ sao cho $\Delta_j^* > 0$. Chọn $\Delta_k^* = \max \{ \Delta_j^* : \Delta_j^* > 0 \}$ ta đưa A^{*k} vào thay cho A^{*0} (chú ý phần tử trực là $x_{0k}^* = 1$).

2) Với cơ sở mới $A^{0*}, A^{1*}, A^{2*}, \dots, A^{m*}$ ta có các ước lượng sẽ là $\Delta_j^{**} = \Delta_j^* - M\Delta_k^*$. Ta có $\Delta_j^{**} = \Delta_j^* - M\Delta_k^* \leq 0$ với M là số dương đủ lớn, khi đó cơ sở mới là cơ sở đối ngẫu chấp nhận được. Xuất phát từ cơ sở này ta lập bảng đơn hình tiếp theo để giải bài toán gốc mở rộng (dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu).

3) Bài toán gốc mở rộng không có phương án thì bài toán gốc ban đầu cũng không có phương án.

4) Bài toán gốc mở rộng có phương án tối ưu $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ và A^{*0} là vectơ trong cơ sở tương ứng. Khi đó $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc.

5) Bài toán gốc mở rộng có phương án tối ưu $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ và A^{*0} là vectơ không nằm trong cơ sở tương ứng. Khi đó giá trị hàm mục tiêu có dạng $\delta M + \sigma$ (chú ý ta đang xét bài toán cực tiểu). Ta có các trường hợp:

i) $\delta < 0$, dẫn đến $\delta M + \sigma \rightarrow -\infty$, khi đó bài toán gốc có phương án nhưng hàm mục tiêu không bị chặn.

ii) $\delta = 0$ thì bài toán gốc có phương án tối ưu khi ta đã loại bỏ $\bar{x}_0$, còn các thành phần khác được chọn với M là số dương bé nhất sao cho $\bar{x}_j \geq 0, j = 1, n$.

Ví dụ: Giải bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Giải: Đưa vào hai ẩn phụ bài toán trở thành

$$f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Thấy ngay A^1, A^5 là một cơ sở. Bổ sung vào bài toán trên một ràng buộc giả tạo ta có bài toán

$$f(x) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_0 + x_2 + x_3 = M \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Xác định $x^j = B^{-1}A^j$ với B là ma trận có hai cột là A^1, A^5 . Ta có

$$x^0 = B^{-1}A^0 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 43/6 \end{pmatrix},$$

$$x^1 = B^{-1}A^1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = B^{-1}A^2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 11/6 \end{pmatrix},$$

$$x^3 = B^{-1}A^3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 23/6 \end{pmatrix},$$

$$x^4 = B^{-1}A^4 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix},$$

$$x^5 = B^{-1}A^5 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sắp xếp các phần tử lên bảng đơn hình và tính toán bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu ta có

		Phương án		0	4	-3	2	0	0
Cơ sở	c_0^*		M	x_0^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*
A0	0	0	1	1	0	[1]	1	0	0
A1	4	5/6	0	0	1	1/6	1/6	-1/6	0
A5	0	43/6	0	0	0	11/6	23/6	1/6	1
				0	0	(11/3)	-4/3	-2/3	0
A2	-3	0	1	1	0	1	1	0	0
A1	4	5/6	-1/6	-1/6	1	0	0	-1/6	0
A5	0	43/6	(-11/6)	[-11/6]	0	0	2	1/6	1
				-11/3	0	0	-5	-2/3	0
A2	-3	43/11	0	0	0	1	23/11	1/11	6/11
A1	4	2/11	0	0	1	0	-2/11	-2/11	-1/11
A0	0	-43/11	1	1	0	0	-12/11	-1/11	-6/11
		-11	0	0	0	0	-9	-1	-2

Bài tập (§1 và §2).

Các bài tập từ 1 đến 6 ta chỉ xét bài toán gốc dạng $f(x) \rightarrow \min$.

1. Gọi x, y theo thứ tự là các phương án của bài toán gốc và đối ngẫu. Chứng minh rằng:

a) $\langle b - Ax, y \rangle \leq 0$ và $\langle c - yA, x \rangle \geq 0$.

b) $\langle c, x \rangle \geq \langle b, y \rangle$. (Định lý 1)

(Nếu là bài toán $f(x) \rightarrow \max$ thì các dấu bất đẳng thức ngược lại)

2. Cho $\bar{x}, \bar{y}$ theo thứ tự là các phương án của bài toán gốc và đối ngẫu thỏa $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle$. Chứng minh rằng $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.

3. Chứng minh định lý 2: Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu đều có tập phương án không rỗng thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của các hàm mục tiêu là bằng nhau.

4. Dùng định lý 3, chứng minh định lý 4: Nếu một trong hai bài toán (gốc hoặc đối ngẫu) có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu là bằng nhau.

5. Chứng minh định lý độ lệch bù. Các phương án $\bar{x}, \bar{y}$ của bài toán gốc và đối ngẫu đều là phương án tối ưu điều kiện cần và đủ là

$$\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = 0$$

Hay tương đương

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

6. Chứng minh: định lý 6, mục 2.6, §1 và mệnh đề 1, mục 2.7, §1.

7. Giả sử $A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}$ là cơ sở đơn vị liên kết của phương án cực biên phát của bài toán gốc dạng chính tắc. Chứng minh phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tính theo công thức:

$$\bar{y} = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m})$$

Trong đó $\Delta_{j_1}, \Delta_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m}$ là các ước lượng ứng với các cột

$A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}$ xuất hiện ở bảng đơn hình cuối cùng và $c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m}$ là các hệ số của $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$.

8. Cho bài toán

$$f(x) = 15x_1 + 19x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 2}.$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
 b) Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

9. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq -4 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_3 \geq 0; x_5 \geq 0$$

$$x_2; x_4 \in \mathbb{R}.$$

- a) Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\bar{x} = (5, -6, 1, -4, 0)$.
 b) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
 c) Chứng tỏ bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

10. Cho bài toán

$$f(x) = -4x_1 + 9x_2 + 16x_3 - 8x_4 - 20x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 5x_5 \geq -9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

$$x_4; x_5 \in \mathbb{R}.$$

- a) Kiểm tra tính tối ưu của phương án $\bar{x} = (2, 0, 1, -2, 3)$.
 b) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
 c) Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

11. Cho bài toán

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 8 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}.$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
b) Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

12. Cho bài toán

$$f(x) = 16x_1 + 8x_2 + 20x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ x_1 \in \mathbb{R}; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
b) Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

13. Cho bài toán

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}.$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
b) Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

14. Cho bài toán

$$f(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 5}.$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .
b) Hãy giải bài toán gốc bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

15. Cho bài toán

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}.$$

- a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên .

b) Hãy giải bài toán gốc bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

16. Cho bài toán

$$f(x) = \sum_{i=1}^n ix_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^i x_j \geq i$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, n}.$$

a) Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b) Hãy giải một trong hai bài toán rồi suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại.

Lời giải hoặc hướng dẫn.

1. a) Ta có $\langle b - Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i$. Theo định nghĩa bài toán

đối ngẫu hai thành phần $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ và y_i luôn trái dấu nhau dẫn đến điều phải chứng minh.

$$\text{Tương tự } \langle c - yA, x \rangle = \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \geq 0 \text{ vì các thành phần}$$

trong từng tích của tổng là cùng dấu.

b) Dễ dàng kiểm chứng rằng

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle + \langle b - Ax, y \rangle &= \langle c, x \rangle + \langle b, y \rangle - \langle Ax, y \rangle \quad (\text{tính chất tích vô hướng}) \\ &= \langle c, x \rangle + \langle b, y \rangle - \langle yA, x \rangle \quad (\text{vì} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \langle yA, x \rangle \\ &= \langle c, x \rangle - \langle yA, x \rangle + \langle b, y \rangle = \langle c - yA, x \rangle + \langle b, y \rangle. \end{aligned}$$

Vậy $\langle c, x \rangle + \langle b - Ax, y \rangle = \langle c - yA, x \rangle + \langle b, y \rangle$. Suy ra

$$\langle c, x \rangle = \langle b, y \rangle + \langle c - yA, x \rangle - \langle b - Ax, y \rangle. \text{ Theo phần a) thì}$$

$$\langle c - yA, x \rangle - \langle b - Ax, y \rangle \geq 0 \text{ từ đó có điều phải chứng minh.}$$

2. Theo bài 1 ta có $\langle c, x \rangle \geq \langle b, \bar{y} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle$, $\forall x$ thuộc tập phương án. Điều này chứng tỏ $\bar{x}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc.

3. Suy ra từ bài 1 b).

4. Giả sử $\bar{x}$ là một phương án tối ưu của bài toán gốc (P)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I') \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J) \quad (3)$$

Theo định lý 3 tồn tại vectơ $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \leq c_j \quad (j \in J(\bar{x})) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i = c_j \quad (j \notin J(\bar{x})) \quad (5)$$

$$\bar{y}_i \geq 0 \quad (i \in I(\bar{x})) \quad (6)$$

$$\bar{y}_i = 0 \quad (i \notin I(\bar{x})) \quad (7)$$

$$\text{Trong đó } I(\bar{x}) = \left\{ i \in I : \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \right\}, J(\bar{x}) = \{ j \in J : \bar{x}_j = 0 \} \quad (8).$$

Chúng ta $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ là phương án của bài toán đối ngẫu. Ta lại có

$$\left(c_j - \langle A^j, \bar{y} \rangle \right) \bar{x}_j = 0, \forall j = \overline{1, n} \text{ (điều này suy ra từ (5) và (8)). Dẫn đến}$$

$$\langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = 0. \text{ Mặt khác từ (7) và (8) ta có } \left(b_i - \langle A_i, \bar{x} \rangle \right) \bar{y}_i = 0, \forall i = \overline{1, m}$$

hay là $\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$. Lại từ bài 1,

$$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle + \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle - \langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle \text{ suy ra } \langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle. \text{ Theo bài 3}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ là các phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.

5. Giả sử $\bar{x}, \bar{y}$ là các phương án của bài toán gốc và đối ngẫu thỏa

$$\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = 0. \text{ Khi đó từ đẳng thức}$$

$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle + \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle - \langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle$ ta có $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle$. Vậy $\bar{x}, \bar{y}$ là các phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.

Ngược lại, giả sử $\bar{x}, \bar{y}$ là các phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu. Khi đó $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle$. Từ đẳng thức $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle + \langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle - \langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle$ suy ra $\langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = \langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle$ (*). Lại vì $\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle \leq 0$ và $\langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle \geq 0$ nên đẳng thức (*) cho kết quả $\langle b - A\bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ và $\langle c - \bar{y}A, \bar{x} \rangle = 0$. Hay tương đương

$$\begin{cases} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) \bar{y}_i = 0 & i = \overline{1, m} \\ \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{y}_i \right) \bar{x}_j = 0 & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

6. Ta có $\bar{y}A^j = cB^{-1}A^j = c\bar{x}^j$ đẳng thức này chứng tỏ $\langle A^j, \bar{y} \rangle = \langle c, \bar{x}^j \rangle$.

Do đó $\langle A^j, \bar{y} \rangle = \langle c, \bar{x}^j \rangle = \Delta_j + c_j \leq c_j, j = \overline{1, n}$ (vì $\bar{x}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc nên $\Delta_j \leq 0, j = \overline{1, n}$). Bất đẳng thức $\langle A^j, \bar{y} \rangle \leq c_j, j = \overline{1, n}$ chứng tỏ $\bar{y}$ là một phương án của bài toán đối ngẫu. Thay $\bar{y}$ vào hàm mục tiêu $\bar{y}b = cB^{-1}b = c\bar{x}$ (chú ý $\bar{y}$ ta để vectơ dòng, b ta để vectơ cột thì phép nhân hai ma trận $\bar{y}b$ trùng với tích vô hướng. Phép nhân ba ma trận $cB^{-1}b$ có tính kết hợp nên $cB^{-1}b = c(B^{-1}b) = c\bar{x}$). Tóm lại ta có đẳng thức $\bar{y}b = c\bar{x}$ hay $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{y} \rangle$. Vậy $\bar{y}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

7. Theo đề bài ta có $\{A^{j_1}, A^{j_2}, \dots, A^{j_m}\} = \{E^1, E^2, \dots, E^m\}$ trong đó E^i là vectơ đơn vị thứ i . Lại có $\langle A^{j_i}, \bar{y} \rangle = \langle E^i, \bar{y} \rangle = \bar{y}_i$ (vì E^i là vectơ đơn vị thứ i). Theo cách lập luận ở bài 6 ta có $\bar{y}A^{j_i} = cB^{-1}A^{j_i} = c\bar{x}^{j_i}$. Suy ra $\langle A^{j_i}, \bar{y} \rangle = \langle c, \bar{x}^{j_i} \rangle = \Delta_{j_i} + c_{j_i}, \forall i = \overline{1, m}$. Mà $\langle A^{j_i}, \bar{y} \rangle = \bar{y}_i$ nên ta có công thức $\bar{y} = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m})$. (Kết quả thật độc đáo)

8. Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho là

$$g(y) = 3y_1 + 2y_2 + 7y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 15 \\ y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Chúng ta có thể thấy bài toán đối ngẫu giải sẽ nhanh hơn bài toán gốc. Ta giải bài toán đối ngẫu. Ta có bảng đơn hình

			3	2	7	0	0
Co So	CJ	Ph.An	y1	y2	y3	y4	y5
A4	0	15	3	1	3	1	0
A5	0	19	1	1	4	0	1
			-3	-2	-7	0	0
A4	0	3/4	9/4	1/4	0	1	-3/4
A3	7	19/4	1/4	1/4	1	0	1/4
			5/4	1/4	0	0	-7/4
A1	3	1/3	1	1/9	0	4/9	-1/3
A3	7	14/3	0	2/9	1	-1/9	1/3
			0	-1/9	0	5/9	4/3
A2	2	3	9	1	0	4	-3
A3	7	4	-2	0	1	-1	1
			1	0	0	1	1

Phương án tối ưu $Y = (0, 3, 4, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $g = 34$.

Ta sẽ tìm phương án tối ưu của bài toán gốc. Có thể tìm bằng ba cách sau:

Cách 1: Dùng kết quả bài 7.

Ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là A^4, A^5 . Ta có $A^4 = A^{j_1} = E^1, A^5 = A^{j_2} = E^2$. Hai hệ số đứng trước $x_4 := y_4, x_5 := y_5$ là $c_{j_1} = 0, c_{j_2} = 0$ Các ước lượng

$\Delta_{j_1} = \Delta_4 = 1, \Delta_{j_2} = \Delta_5 = 1$. Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán gốc (đối ngẫu của đối ngẫu) là $\bar{x} = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}) = (1+0, 1+0) = (1, 1)$.

Cách 2: Dùng công thức ở định lý 6: $x = cB^{-1}$

Với $c = (2, 7)$ và $B = (A^2, A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Vậy $x = (2, 7) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = (2, 7) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1)$.

Cách 3: Dùng định lý độ lệch bù.

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = (0, 3, 4)$, phương án tối ưu của bài toán gốc là

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Các ẩn $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} (15 - (3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3))\bar{x}_1 = 0 \\ (19 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3))\bar{x}_2 = 0 \\ (3 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2))\bar{y}_1 = 0 \\ (2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2))\bar{y}_2 = 0 \\ (7 - (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2))\bar{y}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (15 - (3 \cdot 0 + 3 + 3 \cdot 4))\bar{x}_1 = 0 \quad (1) \\ (19 - (0 + 3 + 4 \cdot 4))\bar{x}_2 = 0 \quad (2) \\ (3 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) \cdot 0 = 0 \quad (3) \\ (2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) \cdot 3 = 0 \quad (4) \\ (7 - (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2)) \cdot 4 = 0 \quad (5) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không cho ta điều gì, từ hai phương trình (4) và (5) ta có

$$\begin{cases} (2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) \cdot 3 = 0 \quad (4) \\ (7 - (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2)) \cdot 4 = 0 \quad (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = 0 \\ 7 - (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = 1. \end{cases}$$

Bây giờ ta thử giải bài toán gốc và làm các cách như trên để tìm lại phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Thêm vào hai ẩn phụ và ba ẩn giả, sau đó sắp xếp các phân tử lên bảng đơn hình và tính toán ta được.

			15	19	0	0	0	M	M	M
Cơ So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A6	M	3	3	1	-1	0	0	1	0	0
A7	M	2	1	1	0	-1	0	0	1	0
A8	M	7	3	4	0	0	-1	0	0	1

			(M)	7	6	-1	-1	-1	0	0	0
				-15	-19	0	0	0	0	0	0
A1	15	1		1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0
A7	M	1		0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0
A8	M	4		0	3	1	0	-1	-1	0	1
			(M)	0	11/3	4/3	-1	-1	-7/3	0	0
				0	-14	-5	0	0	5	0	0
A1	15	5/9		1	0	-4/9	0	1/9	4/9	0	-1/9
A7	M	1/9		0	0	1/9	-1	2/9	-1/9	1	-2/9
A2	19	4/3		0	1	1/3	0	-1/3	-1/3	0	1/3
			(M)	0	0	1/9	-1	2/9	-10/9	0	-11/9
				0	0	-1/3	0	-14/3	1/3	0	14/3
A1	15	1/2		1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	0
A5	0	1/2		0	0	1/2	-9/2	1	-1/2	9/2	-1
A2	19	3/2		0	1	1/2	-3/2	0	-1/2	3/2	0
			(M)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
				0	0	2	-21	0	-2	21	0
A1	15	1		1	0	0	-4	1	0	4	-1
A3	0	1		0	0	1	-9	2	-1	9	-2
A2	19	1		0	1	0	3	-1	0	-3	1
			(M)	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
				0	0	0	-3	-4	0	3	4

Phương án tối ưu $X = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $f = 34$.

Ta sẽ tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Có thể tìm bằng ba cách sau:

Cách 1: Dùng kết quả bài 7.

Ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là A^6, A^7, A^8 . Ta có

$A^6 = A^{j_1} = E^1, A^7 = A^{j_2} = E^2, A^8 = A^{j_3} = E^3$. Ba hệ số đứng trước

x_6, x_7, x_8 là $c_6 = c_{j_1} = M, c_7 = c_{j_2} = M, c_8 = c_{j_3} = M$. Các ước lượng

Δ_j ở bảng đơn hình cuối là

$$\Delta_{j_1} = \Delta_6 = -M, \Delta_{j_2} = \Delta_7 = -M + 3, \Delta_{j_3} = \Delta_8 = -M + 4.$$

Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m}) = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \Delta_{j_3} + c_{j_3}) \\ &= (-M + M, -M + 3 + M, -M + 4 + M) = (0, 3, 4). \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng công thức ở định lý 6: $y = cB^{-1}$

$$\text{Với } c = (15, 0, 19) \text{ và } B = (A^1, A^3, A^2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$y = (15, 0, 19) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = (15, 0, 19) \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = (0, 3, 4).$$

Cách 3: Dùng định lý độ lệch bù.

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$, phương án tối ưu của bài toán gốc là $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$. Các ẩn $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} (15 - (3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3))\bar{x}_1 = 0 \\ (19 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3))\bar{x}_2 = 0 \\ (3 - (3\bar{x}_1 + \bar{x}_2))\bar{y}_1 = 0 \\ (2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2))\bar{y}_2 = 0 \\ (7 - (3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2))\bar{y}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (15 - (3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3))1 = 0 \quad (1) \\ (19 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3))1 = 0 \quad (2) \\ (3 - (3.1 + 1))\bar{y}_1 = 0 \quad (3) \\ (2 - (1 + 1))\bar{y}_2 = 0 \quad (4) \\ (7 - (3.1 + 4.1))\bar{y}_3 = 0 \quad (5) \end{cases}$$

Các phương trình (4), (5) không cho ta điều gì, từ ba phương trình (1), (2) và (3) ta có

$$\begin{cases} (15 - (3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3))1 = 0 \quad (1) \\ (19 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3))1 = 0 \quad (2) \\ (3 - (3.1 + 1))\bar{y}_1 = 0 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 = 15 \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3 = 19 \\ -\bar{y}_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = 0 \\ \bar{y}_2 = 3 \\ \bar{y}_3 = 4. \end{cases}$$

9. a) Trước tiên ta chỉ rõ một số tập hợp $I = \{2, 3\}; I' = \{1\}; J = \{1, 3, 5\}$.

Từ $\bar{x}_5 = 0$ suy ra $J(\bar{x}) = \{j \in J : \bar{x}_j = 0\} = \{5\}$. Thay $x = (5, -6, 1, -4, 0)$

vào hai bất phương trình thứ 2, thứ 3 ta có

$$-2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \bar{x}_4 - \bar{x}_5 = 6 > -4; \bar{x}_1 + 3\bar{x}_3 - 4\bar{x}_5 = 8. \text{ Vậy}$$

$$I(\bar{x}) = \left\{ i \in I : \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \right\} = \{3\} \Rightarrow I \setminus I(\bar{x}) = \{2\}.$$

Véc tơ $x = (5, -6, 1, -4, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán khi tồn tại véc tơ $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$\begin{cases} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 7 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 1 \\ -4\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3 = -3 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + 6\bar{y}_3 \leq 0 \\ \bar{y}_2 \geq 0, \bar{y}_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Nói cách khác không tồn tại $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ thỏa hệ ở trên. Tóm lại, phương án $x = (5, -6, 1, -4, 0)$ không phải là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

b) Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho là:

$$g(y) = 6y_1 - 4y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ -2y_1 - 3y_2 = -2 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ 3y_1 + y_2 = -1 \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$y_2, y_3 \geq 0$$

c) Chúng ta có thể chứng minh bài toán đối ngẫu có tập phương án bằng rỗng. Bài toán gốc có tập phương án khác rỗng (vì x là một phương án). Vậy bài toán gốc có hàm mục tiêu không bị chặn. Vì nếu không bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu sẽ có phương án tối do đó tập phương án khác rỗng. Mâu thuẫn.

10. a) Tương tự bài 9 ta có $I = \{1, 2\}; I' = \{3\}; J = \{1, 2, 3\}$. Từ $\bar{x}_2 = 0$ suy ra $J(\bar{x}) = \{j \in J : \bar{x}_j = 0\} = \{2\}$. Thay $\bar{x} = (2, 0, 1, -2, 3)$ vào hai bất

phương trình thứ 1, thứ 2 ta có bất phương trình thứ hai thỏa dấu đẳng thức.

Vậy
$$I(\bar{x}) = \left\{ i \in I : \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j = b_i \right\} = \{2\} \Rightarrow I \setminus I(\bar{x}) = \{1\}$$

Véc tơ $\bar{x} = (2, 0, 1, -2, 3)$ là phương án tối ưu của bài toán khi tồn tại véc tơ $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$\begin{cases} 5\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 = -4 \\ 4\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3 \leq 9 \\ -\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 16 \\ 3\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + 2\bar{y}_3 = -8 \\ \bar{y}_1 - 5\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 = -20 \\ \bar{y}_2 \geq 0, \bar{y}_1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\bar{y}_1 = 0; \bar{y}_2 = 4; \bar{y}_3 = 0$. Tức là tồn tại $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ thỏa hệ ở trên. Tóm lại, phương án $\bar{x} = (2, 0, 1, -2, 3)$ là phương án tối ưu của bài toán đã cho.

b) Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho là

$$g(y) = 5y_1 - 9y_2 + 2y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 - y_3 \leq -4 \\ 4y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq 9 \\ -y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 16 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = -8 \\ y_1 - 5y_2 + 3y_3 = -20 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0; y_3 \in \mathbb{R}$$

c) Vì đã biết $\bar{x} = (2, 0, 1, -2, 3)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc nên phương án tối ưu $\bar{y}$ của bài toán đối ngẫu có thể tìm từ định lý độ lệch bù:

$$\begin{cases} (5 - (5\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 3\bar{x}_4 + \bar{x}_5))\bar{y}_1 = 0 \\ (-9 - (-\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 - 2\bar{x}_4 - 5\bar{x}_5))\bar{y}_2 = 0 \\ (2 - (-\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 2\bar{x}_4 + 3\bar{x}_5))\bar{y}_3 = 0 \\ (-4 - (5\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3))\bar{x}_1 = 0 \\ (9 - (4\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3))\bar{x}_2 = 0 \\ (16 - (-\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 - \bar{y}_3))\bar{x}_3 = 0 \\ (-8 - (3\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + 2\bar{y}_3))\bar{x}_4 = 0 \\ (-20 - (\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3))\bar{x}_5 = 0 \end{cases}$$

Thay các giá trị đã biết vào hệ ta được

$$\begin{cases} (5 - (5.2 + 4.0 - 1 + 3.(-2) + 3))\bar{y}_1 = 0 \\ (-9 - (-2 + 2.0 + 4.1 - 2.(-2) - 5.3))\bar{y}_2 = 0 \\ (2 - (-2 - 2.0 - 1 + 2.(-2) + 3.3))\bar{y}_3 = 0 \\ (-4 - (5\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3)).2 = 0 \\ (9 - (4\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2 - 2\bar{y}_3)).0 = 0 \\ (16 - (-\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2 - \bar{y}_3)).1 = 0 \\ (-8 - (3\bar{y}_1 - 2\bar{y}_2 + 2\bar{y}_3)).(-2) = 0 \\ (-20 - (\bar{y}_1 - 5\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3)).3 = 0 \end{cases}$$

Chú ý các phương trình thứ hai, thứ ba, thứ năm không cho ta điều gì. Phương trình thứ nhất cho $\bar{y}_1 = 0$. Kết hợp nghiệm $\bar{y}_1 = 0$ với ba phương trình sau cùng ta được

$$\begin{cases} 4\bar{y}_2 - \bar{y}_3 = 16 \\ -2\bar{y}_2 + 2\bar{y}_3 = -8 \\ -5\bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y}_2 = 4 \\ \bar{y}_3 = 0. \end{cases}$$

Vậy phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\bar{y}_1 = 0; \bar{y}_2 = 4; \bar{y}_3 = 0$.

11. a) Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho là

$$g(y) = 16y_1 + 8y_2 + 20y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 2 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + 4y_2 - 2y_3 \geq 1 \\ y_2 + 3y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \in \mathbb{R}; y_2, y_3 \geq 0.$$

b) Ta giải bài toán gốc. Thêm vào hai ẩn phụ x_5, x_6 vào ràng buộc thứ hai, thứ ba. Lập bảng đơn hình ta có:

			2	1	1	3	0	0
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	2	16	1	-2	1	0	0	0
A5	0	8	0	1	4	1	1	0
A6	0	20	0	1	-2	3	0	1
			0	-5	1	-3	0	0
A1	2	32	1	0	9	2	2	0
A2	1	8	0	1	4	1	1	0
A6	0	12	0	0	-6	2	-1	1
			0	0	21	2	5	0

Phương án tối ưu là $X = (32, 8, 0, 0, 0, 12,)$

Giá trị tối ưu $f = 72$.

b) Ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Có thể tìm bằng ba cách sau:

Cách 1: Dùng kết quả bài 7.

Ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là A^1, A^5, A^6 . Ta có:

$A^1 = A^{j_1} = E^1, A^5 = A^{j_2} = E^2, A^6 = A^{j_3} = E^3$. Ba hệ số đứng trước x_1, x_5, x_6 là $c_1 = c_{j_1} = 2, c_5 = c_{j_2} = 0, c_6 = c_{j_3} = 0$. Các ước lượng Δ_j ở bảng đơn hình cuối là $\Delta_{j_1} = \Delta_1 = 0, \Delta_{j_2} = \Delta_5 = 5, \Delta_{j_3} = \Delta_6 = 0$.

Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m}) = (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \Delta_{j_3} + c_{j_3}) \\ &= (0 + 2, 5 + 0, 0 + 0) = (2, 5, 0). \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng công thức ở định lý 6: $y = cB^{-1}$

$$\text{Với } c = (2, 1, 0) \text{ và } B = (A^1, A^2, A^6) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } y = (2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (2, 5, 0).$$

Cách 3: Dùng định lý độ lệch bù. Tương tự ta cũng có kết quả như trên.

12. Đối ngẫu chính là bài 11.

13.a) Bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho là

$$g(y) = 5y_1 + 3y_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 4 \\ y_1 + 4y_2 \leq 6 \\ 3y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

b) Ta giải bài toán đối ngẫu. Thêm vào bốn ẩn phụ $y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$ vào ràng buộc thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư. Lập bảng đơn hình ta có:

			5	3	0	0	0	0
Co So	CJ	Ph.An	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A3	0	4	1	1	1	0	0	0
A4	0	6	1	4	0	1	0	0
A5	0	5	3	2	0	0	1	0
A6	0	3	2	1	0	0	0	1
			-5	-3	0	0	0	0
A3	0	5/2	0	1/2	1	0	0	-1/2
A4	0	9/2	0	7/2	0	1	0	-1/2
A5	0	1/2	0	1/2	0	0	1	-3/2
A1	5	3/2	1	1/2	0	0	0	1/2
			0	-1/2	0	0	0	5/2

A3	0	2	0	0	1	0	-1	1
A4	0	1	0	0	0	1	-7	10
A2	3	1	0	1	0	0	2	-3
A1	5	1	1	0	0	0	-1	2
			0	0	0	0	1	1

Phương án tối ưu là $Y = (1, 1, 2, 1, 0, 0)$

Giá trị tối ưu $g = 8$.

Ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc. Có thể tìm bằng ba cách sau:
Cách 1: Dùng kết quả bài 7.

Ta có cơ sở liên kết của phương án cực biên xuất phát trong bảng đơn hình đầu là A^3, A^4, A^5, A^6 . Ta có

$A^3 = A^{j_1} = E^1, A^4 = A^{j_2} = E^2, A^5 = A^{j_3} = E^3, A^6 = A^{j_4} = E^4$. Bốn hệ số đứng trước x_3, x_4, x_5, x_6 là

$c_3 = c_{j_1} = 0, c_4 = c_{j_2} = 0, c_5 = c_{j_3} = 0, c_6 = c_{j_4} = 0$. Các ước lượng Δ_j ở bảng đơn hình cuối là

$$\Delta_{j_1} = \Delta_3 = 0, \Delta_{j_2} = \Delta_4 = 0, \Delta_{j_3} = \Delta_5 = 1, \Delta_{j_4} = \Delta_6 = 1.$$

Vậy ta có phương án tối ưu của bài toán gốc là

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \dots, \Delta_{j_m} + c_{j_m}) \\ &= (\Delta_{j_1} + c_{j_1}, \Delta_{j_2} + c_{j_2}, \Delta_{j_3} + c_{j_3}, \Delta_{j_4} + c_{j_4}) \\ &= (0 + 0, 0 + 0, 1 + 0, 1 + 0) = (0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Cách 2: Dùng công thức ở định lý 6: $x = cB^{-1}$

$$\text{Với } c = (0, 0, 3, 5) \text{ và } B = (A^3, A^4, A^2, A^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\bar{x} = (0, 0, 3, 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (0, 0, 3, 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 1).$$

Cách 3: Dùng định lý độ lệch bù.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} (5 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 + 2\bar{x}_4))\bar{y}_1 = 0 \\ (3 - (\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \bar{x}_4))\bar{y}_2 = 0 \\ (4 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2))\bar{x}_1 = 0 \\ (6 - (\bar{y}_1 + 4\bar{y}_2))\bar{x}_2 = 0 \\ (5 - (3\bar{y}_1 + 2\bar{y}_2))\bar{x}_3 = 0 \\ (3 - (2\bar{y}_1 + \bar{y}_2))\bar{x}_4 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 + 2\bar{x}_4)) \cdot 1 = 0 \\ (3 - (\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \bar{x}_4)) \cdot 1 = 0 \\ (4 - (1 + 1))\bar{x}_1 = 0 \\ (6 - (1 + 4 \cdot 1))\bar{x}_2 = 0 \\ (5 - (3 \cdot 1 + 2 \cdot 1))\bar{x}_3 = 0 \\ (3 - (2 \cdot 1 + 1))\bar{x}_4 = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = 1 \\ \bar{x}_4 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

15. Giải như ví dụ ở bài 2.

16. Giải như ví dụ ở bài 2.

17. Sau khi viết bài toán đối ngẫu chúng ta nên giải bài toán này. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $\bar{y} = (0, 0, 0, \dots, 1)$ và giá trị tối ưu là $g = n$. Phương án tối ưu của bài toán gốc là $x = (n, 0, 0, \dots, 0)$ và giá trị tối ưu cũng là $f = n$.

§3. MỘT SỐ THUẬN TIỆN VÀ ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU.

1. Thuận tiện của lý thuyết đối ngẫu.

Thuận tiện của lý thuyết đối ngẫu như chúng ta đã thấy đó là chúng ta có thể biết được phương án tối ưu của một bài toán, nếu đã giải được bài toán gốc của nó (nếu bài toán gốc dễ giải hơn).

Cụ thể khi giải bài toán dạng bài toán

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

trong đó $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \geq 0$ thì không gì dễ hơn là giải bài toán đối ngẫu của nó, hoặc dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Giả sử chúng ta đã giải xong bài toán dạng

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và thu được phương án tối ưu $x = (x^0, 0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$. Khi đó nếu cần phải giải bài toán

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax = b'$$

$$x \geq 0$$

thì không cần phải giải lại từ đầu, mà chỉ cần tính $\overline{x_0} = B^{-1}b'$, trong đó B là ma trận có các cột là các vectơ lập thành từ cơ sở đối ngẫu chấp nhận được ở bảng đơn hình cuối cùng. Nếu $\overline{x_0} \geq 0$ thì ứng với nó ta có ngay phương án tối ưu của bài toán mới. Nếu không thì trong bảng đơn hình cuối cùng ta thay x_0 bởi $\overline{x_0}$ và lúc đó ta có bảng đơn hình xuất phát để giải bài toán mới. Để làm sáng tỏ điều này chúng ta xét một ví dụ minh họa.

Ví dụ: Giải bài toán (đã xét ở bài 1, chương 2)

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -6 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = -9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Kết quả tính toán bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu thu được trong bảng sau

			1	2	3	4	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A5	0	-6	-1	-1	-1	-4	1	0
A6	0	(-9)	[-4]	-1	-1	-1	0	1
		0	-1	-2	-3	-4	0	0
A5	0	(-15/4)	0	-3/4	-3/4	[-15/4]	1	-1/4
A1	1	9/4	1	1/4	1/4	1/4	0	-1/4
		9/4	0	-7/4	-11/4	-15/4	0	-1/4
A4	4	1	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15
A1	1	2	1	1/5	1/5	0	1/15	-4/15
		6	0	-1	-2	0	-1	0

Bây giờ chúng ta xét bài toán

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -7 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = -12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Ta có $\overline{x}_0 = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/15 \\ 16/15 \end{pmatrix}$, vectơ này không âm

nên phương tối ưu ở bài toán ở trên là $x = \left(\frac{41}{15}, 0, 0, \frac{16}{15}, 0, 0 \right)$.

Bây giờ chúng ta xét bài toán

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = -30 \\ -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}.$$

Ta có $\overline{x_0} = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, vectơ này có thành phần âm nên có thể giải bài toán này bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu xuất phát từ bảng đơn hình sau (đã thay cột phương án bởi cột $\overline{x_0}$):

			1	2	3	4	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A4	4	9	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15
A1	1	(-6)	1	1/5	1/5	0	1/15	[-4/15]
			0	-1	-2	0	-1	0

Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu biến đổi tiếp ta có bảng đơn hình sau và được phương án tối ưu.

A4	4	15/2	1/4	1/4	1/4	1	-1/4	0
A6	0	45/2	-15/4	-3/4	-3/4	0	-1/4	1
		30	0	-1	-2	0	-1	0

Giả sử có một bài toán đã giải xong bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và có dấu hiệu tối ưu. Sau đó lại nảy sinh một bài toán là hàm mục tiêu và các ràng buộc như bài toán cũ nhưng có thêm một hay nhiều ràng buộc mới. Khi đó không cần phải giải lại từ đầu, mà có thể bắt đầu từ bảng đơn hình cuối này để giải cho bài toán mới. Chẳng hạn chúng ta xét lại bài toán

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Bây giờ chúng ta thêm vào ràng buộc $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 18$. Bài toán ở trên đã giải bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu và đã có phương án tối ưu $x = (2, 0, 0, 1)$. Phương án này không thỏa ràng buộc vừa mới thêm vào. Để xử lý ràng buộc mới này ta đưa vào ẩn phụ x_7 và biến đổi về dạng đẳng thức như sau $-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 + x_7 = -18$. Đưa ràng buộc này vào bảng cuối cùng

A4	4	1	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15
A1	1	2	1	1/5	1/5	0	1/15	-4/15
		6	0	-1	-2	0	-1	0

ta được bảng (đã thêm một cột thứ bảy)

			1	2	3	4	0	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A4	4	1	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15	0
A1	1	2	1	1/5	1/5	0	1/15	-4/15	0
A7	0	-18	-2	-3	-1	-5	0	0	1
		6	0	-1	-2	0	-1	0	0

Biến đổi sơ cấp để cột x_1 và cột x_4 trở thành vectơ đơn vị ta được (Thay dòng 3 bởi dòng 3 cộng 5 lần dòng 1 và 2 lần dòng 2).

			1	2	3	4	0	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A4	4	1	0	1/5	1/5	1	-4/15	1/15	0
A1	1	2	1	1/5	1/5	0	1/15	-4/15	0
A7	0	(-9)	0	-8/5	2/5	0	-6/5	[-1/5]	1
		6	0	-1	-2	0	-1	0	0

Dùng thuật toán đơn hình đối ngẫu biến đổi tiếp ta được

			1	2	3	4	0	0	0
Cơ sở	H.số c_j	Ph.án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
A4	4	(-2)	0	-1/3	1/3	1	[-2/3]	0	1/3
A1	1	14	1	7/3	-1/3	0	5/3	0	-4/3
A6	0	45	0	8	-2	0	6	1	-5
		6	0	-1	-2	0	-1	0	0
A5	0	3	0	1/2	-1/2	-3/2	1	0	-1/2
A1	1	9	1	3/2	1/2	5/2	0	0	-1/2
A6	0	27	0	5	1	9	0	1	-2
		9	0	-1/2	-5/2	-3/2	0	0	-1/2

Vậy phương án tối ưu của bài toán mới là $x = (9, 0, 0, 0)$.

2. Ứng dụng của lý thuyết đối ngẫu vào bài toán trò chơi ma trận.

Lý thuyết trò chơi là một lý thuyết có nhiều ứng dụng trong thực tế, do giới hạn của giáo trình chúng ta không thể giới thiệu lý thuyết này ở đây. Chúng ta chỉ giới thiệu một cách sơ lược và một vài bài toán trò chơi mà các bạn đã biết hằng ngày.

Xét một trò chơi với hai người chơi (chẳng hạn như oẳn tù tì; chẵn - lẻ). Ký hiệu hai người chơi là P_1 và P_2 . Những trò chơi này bạn đọc đã biết, ở đó người chơi không chọn cố định một chiến lược nào. Vì như thế đối phương sẽ biết và họ thắng cuộc. Người chơi P_1 chọn một tập chiến lược mà ta sẽ ký hiệu là $I = \{1, 2, \dots, m\}$, Người chơi P_2 chọn một tập chiến lược mà ta sẽ ký hiệu là $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Nếu P_1 chọn chiến lược $i \in I$ và P_2 chọn chiến lược $j \in J$ thì P_1 nhận được số tiền là a_{ij} từ P_2 . Nếu $a_{ij} > 0$ thì P_1 thắng P_2 lúc đó P_2 trả cho P_1 a_{ij} đồng, nếu $a_{ij} = 0$ hai người hòa nhau, nếu $a_{ij} < 0$ thì P_1 thua P_2 lúc đó P_2 nhận từ P_1 a_{ij} đồng.

Tại mỗi lần chơi, người chơi P_1 đối với chiến lược $i \in I$ sẽ chọn một tỉ lệ x_i , ($0 \leq x_i \leq 1$) (theo nghĩa xác suất) nào đó. Véc tơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ trong đó $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ được gọi là chiến lược hỗn hợp của P_1 . Tương tự như vậy véc tơ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0$ trong đó $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ được gọi là chiến lược hỗn hợp của P_2 .

Khi P_1 chọn chiến lược hỗn hợp x còn P_2 chọn chiến lược cố định j thì số tiền thắng mà P_1 thu được sẽ là $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m$, ($j = \overline{1, n}$). Gọi α là số tiền thắng tối thiểu mà P_1 có được bất kể P_2 chọn chiến lược nào đi nữa, ta có $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m \geq \alpha$, $\forall j = \overline{1, n}$. Đối với người chơi P_1 giá trị α càng lớn càng tốt, nghĩa là người chơi P_1 sẽ giải bài toán

$$\begin{aligned} &\alpha \rightarrow \max \\ &\begin{cases} a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m \geq \alpha, \forall j = \overline{1, n} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi P_2 chọn chiến lược hỗn hợp y còn P_1 chọn chiến lược cố định i thì số tiền thua mà P_2 phải trả sẽ là $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n$, ($i = \overline{1, m}$). Gọi β là số tiền thua tối đa mà P_2 phải trả bất kể P_1 chọn chiến lược nào đi

nữa, ta có $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \leq \beta, (i = \overline{1, m})$. Đối với người chơi P_2 giá trị β càng nhỏ càng tốt, nghĩa là người chơi P_2 sẽ giải bài toán

$$\begin{aligned} & \beta \rightarrow \min \\ & \begin{cases} a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n \leq \beta, (i = \overline{1, m}) \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1 \\ y_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì α, β thay đổi nên có thể xem là ẩn. Từ đó chúng ta thấy ngay rằng đây là cặp bài toán đối ngẫu của nhau.

Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ.

Ví dụ 1: Trò chơi chẵn – lẻ.

Trò chơi chỉ xét hai người. Người chơi P_1 “cầm cái” (nhà cái) được phép gieo một đồng tiền, người chơi P_2 gọi là “con” đặt cược với người P_1 như sau. P_2 đặt mặt sấp (chẵn), sau đó người P_1 gieo đồng tiền. Nếu đồng tiền xuất hiện mặt sấp thì P_1 chung cho P_2 1 đồng tiền, ngược lại P_2 chung cho P_1 1 đồng tiền. Tương tự như vậy cho trường hợp P_2 đặt mặt ngửa. Số tiền thắng thua của P_1, P_2 được ghi trong ma trận sau đây gọi là ma trận trò chơi.

$P_1 \backslash P_2$	Chẵn	Lẻ
Chẵn	1	-1
Lẻ	-1	1

Gọi $x = (x_1, x_2)$ là chiến lược hỗn hợp mà người chơi P_2 sẽ chọn. Khi đó theo như trên bài toán của P_2 sẽ là:

$$\begin{aligned} & \alpha \rightarrow \max \\ & \begin{cases} x_1 - x_2 \geq \alpha \\ -x_1 + x_2 \geq \alpha \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $\alpha = x_3 \geq 0$ (có thể bỏ đi giả thiết không âm của x_3) ta có thể đưa về bài toán

$$\begin{aligned} f(x) &= x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{cases} \\ x_i &\geq 0, i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Giải bằng thuật toán đơn hình ta thu được phương án tối ưu là $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ và giá trị tối ưu là $f_{\max} = 0$ (bạn đọc có thể thử giải lại).

Điều này có nghĩa là người chơi P_1 chọn chiến lược là đặt vào cửa chắn hay lẻ đều 50%; tức là sau nhiều lần chơi số lần đặt vào cửa chắn và cửa lẻ đều bằng nhau. Khi đó hai người chơi hòa nhau. Để hiểu rõ hơn điều này xin bạn đọc xem thêm phần lý thuyết xác suất và thống kê.

Ví dụ 2:

Có hai con bài, con át (A) và con 2. Người chơi P_1 rút một con không cho người chơi P_2 nhìn thấy. Nếu P_1 rút được con át, P_1 sẽ nói: "Tôi rút được con át" và yêu cầu P_2 trả cho mình 1 đồng. Nếu P_1 rút được con 2 thì P_1 có thể:

- i) Đánh lừa P_2 , nói rằng: "Tôi rút được con át" và đòi P_2 trả cho mình 1 đồng.
- ii) Thú nhận: "Tôi rút được con 2" và trả cho P_2 1 đồng.

Người chơi P_2 trong trường hợp người chơi P_1 nói có con át có thể:

- i) Tin P_1 nói thật và chung cho P_1 1 đồng.
- ii) Không tin và kiểm tra lại. Nếu P_1 nói dối thì nhận được từ P_1 2 đồng, còn nếu P_1 nói đúng thì phải trả cho P_1 2 đồng.

Bài toán đặt ra là P_2 nên chọn chiến lược như thế nào cho tối ưu.

Giải: Trước tiên chúng ta xây dựng ma trận trò chơi

$P_1 \backslash P_2$	Tin	Không tin
	a_{11}	a_{12}
Nói thật		

Nói dối	a_{21}	a_{22}

a_{11} là số tiền mà P_1 nhận được từ P_2 , khi P_1 nói thật (khi rút phải con 2) và P_2 tin.

Nếu P_1 rút được con át thì nhận được 1 đồng, còn nếu rút được con 2 thì mất 1 đồng. Vậy số tiền P_1 nhận được từ P_2 sẽ là kỳ vọng toán của một biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất sau:

Số tiền nhận được	1	-1
Tỷ lệ (Xác suất)	0.5	0.5

$$\text{Vậy } a_{11} = 1.(0.5) + (-1).(0.5) = 0.$$

a_{12} là số tiền mà P_1 nhận được từ P_2 , khi P_1 nói thật (khi rút được con át) và P_2 không tin.

Nếu P_1 rút được con át thì nhận được 2 đồng, còn nếu rút được con 2 thì mất 1 đồng. Vậy số tiền P_1 nhận được từ P_2 sẽ là kỳ vọng toán của một biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất sau:

Số tiền nhận được	2	-1
Tỷ lệ (Xác suất)	0.5	0.5

$$\text{Vậy } a_{12} = 2.(0.5) + (-1).(0.5) = 0.5.$$

a_{21} là số tiền mà P_1 nhận được từ P_2 , khi P_1 nói dối (khi rút phải con 2) và P_2 tin.

Nếu P_1 rút được con át thì nhận được 1 đồng, còn nếu rút được con 2 thì cũng nhận được 1 đồng (do P_2 luôn tin P_1 nói). Vậy số tiền P_1 nhận được từ P_2 sẽ là kỳ vọng toán của một biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất sau:

Số tiền nhận được	1	1
Tỷ lệ (Xác suất)	0.5	0.5

$$\text{Vậy } a_{21} = 1.(0.5) + 1.(0.5) = 1.$$

a_{22} là số tiền mà P_1 nhận được từ P_2 , khi P_1 nói dối (khi rút phải con 2) và P_2 không tin.

Nếu P_1 rút được con át thì nhận được 2 đồng (do P_2 không tin nên kiểm tra), còn nếu rút được con 2 thì mất 2 đồng (do P_2 không tin nên kiểm tra). Vậy số tiền P_1 nhận được từ P_2 sẽ là kỳ vọng toán của một biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất sau:

Số tiền nhận được	2	-2
Tỷ lệ (Xác suất)	0.5	0.5

$$\text{Vậy } a_{21} = 2.(0.5) + (-2).(0.5) = 0.$$

Từ đó ma trận của trò chơi sẽ là

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

và theo như đã trình bày ở trên ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính của người chơi P_1 là

$$\begin{aligned} &\alpha \rightarrow \max \\ &\begin{cases} x_2 \geq \alpha \\ 0.5x_1 \geq \alpha \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \\ &x_i \geq 0, i = \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

Bài toán trên có phương án tối ưu là $x = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ và giá trị tối ưu là $f_{\max} = \frac{1}{3}$. Điều này cho thấy rằng người chơi P_1 có số tiền thắng ít nhất là $1/3$ đồng, khi chọn chiến lược $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ nghĩa là $2/3$ trong số lần chơi thì nói thật, còn $1/3$ số lần thì nói dối. Còn với người chơi P_2 sẽ chọn chiến lược $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (Kết quả này thu được từ việc suy ra nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu) thì thua ít nhất. Tóm lại, trò chơi này nếu chơi nhiều lần người P_2 thua, P_2 không nên chơi nhiều lần.

Bài tập.

1. Hãy giải các bài toán sau bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$a) \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}.$$

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 19 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}.$$

$$f(x) = x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, 3}.$$

2. a) Hãy giải bài toán sau bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

b) Hãy giải bài toán sau

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -8 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -13 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}.$$

c) Hãy giải bài toán sau

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 13 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

3. Hãy giải bài toán trò chơi dân gian “Oẳn tù tì”.

4. Có hai con bài, con át (A) và con 2. Người chơi P_1 rút một con không cho người chơi P_2 nhìn thấy. Nếu P_1 rút được con át, P_1 sẽ nói: "Tôi rút được con át" và yêu cầu P_2 trả cho mình 2 đồng. Nếu P_1 rút được con 2 thì P_1 có thể:

- iii) Đánh lừa P_2 , nói rằng: "Tôi rút được con át" và đòi P_2 trả cho mình 2 đồng.
- iv) Thù nhận: "Tôi rút được con 2" và trả cho P_2 2 đồng.

Người chơi P_2 trong trường hợp người chơi P_1 nói có con át có thể:

- iii) Tin P_1 nói thật và chung cho P_1 2 đồng.
- iv) Không tin và kiểm tra lại. Nếu P_1 nói dối thì nhận được từ P_1 5 đồng, còn nếu P_1 nói đúng thì phải trả cho P_1 4 đồng.

Bài toán đặt ra là P_2 nên chọn chiến lược như thế nào cho tối ưu.

Chương III.

BÀI TOÁN VẬN TẢI

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa 1:

Trong §1, chương 1 ta đã giới thiệu về bài toán vận tải. Dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Đây chính là bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có $m \times n$ ẩn x_{ij} và $m+n$ ràng buộc. Các ràng buộc có thể viết lại dưới dạng $Ax = A^0$. Trong đó A là ma trận có $m+n$ dòng và $m \times n$ cột, x là véctor $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})^T$ $A^0 = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, A là ma trận có $m+n$ dòng và $m \times n$ cột với A^{ij} là cột có thành phần thứ i là 1, thành phần thứ $m+j$ là 1 các thành phần khác bằng 0.

Ví dụ: Xét lại bài toán vận tải đã biết ở chương 1.

$$f = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75 \\ x_{11} + x_{21} = 35 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 45 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i, j \end{cases}$$

Các ràng buộc có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 75 \\ 35 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Ở đây $m=2; n=3$, từ đó

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó các ràng buộc trên có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_{11} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{12} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_{13} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_{21} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{22} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_{23} = \begin{pmatrix} 30 \\ 75 \\ 35 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Như vậy $A^{11}, A^{12}, \dots, A^{23}$ lần lượt là cột của các hệ số ẩn $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23}$.

Trở lại bài toán đã định nghĩa từ đầu các ràng buộc (2), (3) có thể viết lại dưới dạng

$$\left(A^{11}x_{11} + A^{12}x_{12} + \dots + A^{1n}x_{1n} \right) + \left(A^{21}x_{21} + A^{22}x_{22} + \dots + A^{2n}x_{2n} \right) + \dots + \left(A^{m1}x_{m1} + A^{m2}x_{m2} + \dots + A^{mn}x_{mn} \right) = A^0. \text{ Trong đó } A^{ij} \text{ là cột hệ số của ẩn } x_{ij}.$$

Chú ý trong (2) có m phương trình, khi cộng m phương trình này lại ta được

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i.$$

Trong (3) có n phương trình, khi cộng n phương trình này lại ta được

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Hiển nhiên ta có $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}$ do đó

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Đẳng thức này được gọi là điều kiện cân bằng thu phát của bài toán vận tải.

2. Định lý 1: Ma trận A các hệ số ràng buộc của bài toán vận tải có hạng bằng $m+n-1$.

3. Định lý 2: Điều kiện cân bằng thu phát là điều kiện cần và đủ để bài toán vận tải có tập phương án khác rỗng.

Hơn nữa, nếu bài toán vận tải có điều kiện cân bằng thu phát thì có phương án tối ưu.

§2. DẠNG BẢNG CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Bài toán vận tải có thể cho dưới dạng bảng sau đây

Thu Phát	b_1	b_2	...	b_j		b_n
a_1	c_{11}	c_{12}		c_{1j}		c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}		c_{2j}		c_{2n}
.....						
a_i	c_{i1}	c_{i2}		c_{ij}		c_{in}
.....						
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mj}		c_{mn}

Nhìn vào bảng vận tải ta có thể phát biểu như sau:

Ta có m kho là nơi phát hay cung cấp hàng hoá, kho thứ i chứa a_i đơn vị hàng hoá ($i=1,2,...,m$), có n nơi tiêu thụ hay nhận hàng hoá, nơi nhận thứ j cần b_j đơn vị hàng hoá. Giá tiền hay cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ kho thứ i đến nơi nhận thứ j là c_{ij} đơn vị tiền tệ.

Cước phí c_{ij} nằm ở một ô mà ta cũng gọi là ô (i,j) . Nếu từ kho thứ i ta vận chuyển đến nơi nhận thứ j một lượng hàng hoá x_{ij} thì ta cũng ghi

x_{ij} vào ô (i, j) . Khi đó với mọi (i, j) , $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ ta có ô (i, j) tương ứng một - một với cước phí c_{ij} , ẩn x_{ij} và vectơ cột A^j .

Bảng $m \times n$ ô của bài toán vận tải ta gọi là bảng vận tải. Nếu các ô (i, j) ta ghi cước phí thì gọi là bảng cước phí hay ma trận cước phí. Nếu các ô (i, j) ta ghi lượng hàng vận chuyển thì gọi là bảng phương án hay ma trận phương án.

1. Định nghĩa 1: Ta gọi một đường đi là tập hợp các ô của bảng sao cho cứ hai ô liên tiếp thì nằm trên cùng một dòng hay một cột, và một dòng hay một cột không chứa quá hai ô.

Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.

Ví dụ:

X		X		
		X	X	
	X		X	

(Đường đi)

	X	X		
	X	X	X	
	X		X	

(Chu trình)

2. Định lý 1: Tập hợp các ô nào đó trong bảng vận tải không chứa chu trình khi và chỉ khi hệ vectơ liên kết với nó độc lập tuyến tính.

3. Hệ quả: Một bảng vận tải có m dòng, n cột thì tập ô không chứa chu trình có tối đa là $m+n-1$ ô.

4. Định lý 2: Một bảng vận tải có m dòng, n cột. Cho E là tập gồm $m+n-1$ ô không chứa chu trình, $\delta(i, j) \notin E$. Khi đó tập hợp $F = E \cup \{\delta(i, j)\}$ có chứa duy nhất một chu trình đi qua $\delta(i, j)$.

Ví dụ: Xét bảng gồm 3 dòng, 4 cột và tập hợp các ô $(1,1); (1,3); (2,3); (2,4); (4,4); (3,2)$. Tập hợp này có 6 ô. $6=3+4-1=m+n-1$ và các ô này không chứa chu trình. Khi đó xét bất kỳ một ô thuộc bảng vận tải ta đều có duy nhất một chu trình đi qua ô này.

X.....X			
		X.....X	
	X.....X		

Chẳng hạn, xét ô $(2,1)$ ta có chu trình là các ô $(2,1); (2,3); (1,3); (1,1)$, và đây là chu trình duy nhất. Chú ý, ta không quan tâm đến ô $(2,4)$, và ta nói ô $(2,4)$ không thuộc chu trình.

Xét ô $(3,1)$ ta có chu trình là các ô $(3,1); (3,4); (2,4); (2,3); (1,3); (1,1)$, và đây là chu trình duy nhất đi qua ô $(3,1)$. Và ta cũng không quan tâm đến ô $(3,2)$, và ta nói ô $(3,2)$ không thuộc chu trình.

5. Định lý 3: Một bảng vận tải có m dòng, n cột. Nếu tập F gồm $m+n$ ô có chứa duy nhất một chu trình đi qua ô (i, j) . Khi đó nếu ta loại ô (i, j) này ra khỏi tập F thì tập các ô còn lại sẽ không chứa chu trình.

Ví dụ:

		X	
X.....X		X.....X	
X.....X	X.....X		

Bảng vận tải trên gồm $3+4=7$ ô có đánh dấu X. Bảng này có chứa duy nhất một chu trình $(3,1); (3,4); (2,4); (2,3); (1,3); (1,1)$. Nếu ta loại bất kỳ một ô chẳng hạn ô $(1,1)$ thì các ô còn lại sẽ không chứa chu trình.

		X	
		X	X
X	X		X

6. Định nghĩa 2: Giả sử

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$$

là một phương án của bài toán vận tải. Khi đó nếu $x_{ij} > 0$ thì ta nói ô (i, j) là ô chọn. Ngược lại ta gọi là ô loại.

7. Định lý 4: Phương án

$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải khi và chỉ khi tập các ô chọn tương ứng với nó không chứa chu trình.

Ví dụ 1: Xét bài toán vận tải cho bởi bảng sau đây

	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Khi đó $x = (30, 0, 0, 50, 0, 0, 35, 10, 40, 15, 0)$ là một phương án. Rõ hơn ta biểu diễn phương án này trên bảng vận tải

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Hệ vectơ tương ứng với nó là $A^{11}, A^{14}, A^{23}, A^{24}, A^{32}, A^{33}$ (chú ý tính chất của vectơ A^{ij}).

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{14} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A^{33} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Có thể kiểm chứng hệ vectơ này lập tuyến tính. Khi đó theo bài 3, chương 1 phương án x là phương án cực biên. Các ô chọn là các ô đánh dấu x không chứa chu trình.

x			x
		x	x
	x	x	

8. Điều kiện tối ưu của một phương án cực biên:

Vì bài toán vận tải là bài toán Quy hoạch tuyến tính nên ta có thể giải bằng thuật toán đơn hình, và điều kiện tối ưu đã biết là $\Delta_{ij} \leq 0, \forall (i, j)$.

Nếu Δ_{ij} ứng với vectơ cơ sở liên kết A^{ij} thì $\Delta_{ij} = 0$. Do đó ta chỉ cần tính các Δ_{ij} ứng với vectơ nằm ngoài cơ sở liên kết.

Giả sử ta có sẵn một phương án cực biên $x = (x_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$, và phương án này có $n+m-1$ thành phần dương. Ký hiệu $E = \{(i, j) : x_{ij} > 0\}$ là tập hợp các ô chọn. Theo định lý 4 thì E không chứa chu trình. Ta cần tính Δ_{ij} với $(i, j) \notin E$.

Theo định lý 2 tập hợp $F = E \cup \{(i, j)\}$ có chứa duy nhất một chu trình V đi qua ô (i, j) . Bắt đầu từ ô (i, j) ta đánh số thứ tự $1, 2, 3, \dots, 2k$ các ô thuộc V . (Chú ý số ô của V là một số chẵn)

Ta có một số kết quả sau đây

8.1. Định lý 5: Ký hiệu V^L, V^C lần lượt là tập hợp các ô thuộc V có số thứ tự lẻ và số thứ tự chẵn. Khi đó

$$\Delta_{ij} = \sum_{(i,j) \in V^C} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V^L} c_{ij}$$

trong đó c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho i đến nơi nhận j .

Ví dụ 2: Xét lại ví dụ 1 và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Ta còn phải tính đến 6 ước lượng Δ_{ij} với (i,j) lần lượt là $(1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1); (3,4)$.

Tính Δ_{12} . Bổ sung ô $(1,2)$ vào các ô chọn ta có duy nhất một chu trình. Đánh số thứ tự 1, 2, 3, 4, 5, 6 các ô trong chu trình này.

x	1		2
	X		X
			
		4	3
		X	
			
	X		X
	6	5	

$V^L = \{(1,2); (2,4); (3,3)\}$, $V^C = \{(1,4); (2,3); (3,2)\}$. Chú ý các cước phí cho ở bảng trong đề bài, ta có

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \sum_{(i,j) \in V^C} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V^L} c_{ij} = (c_{14} + c_{23} + c_{32}) - (c_{12} + c_{24} + c_{33}) = \\ &= (2 + 4 + 2) - (5 + 9 + 3) = -9 \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\Delta_{13} = (2+4) - (7+9) = -8,$$

$$\Delta_{21} = (1+9) - (5+2) = 3,$$

$$\Delta_{22} = (4+2) - (3+7) = -4,$$

$$\Delta_{31} = (3+1+9) - (12+4+2) = -5,$$

$$\Delta_{34} = (3+9) - (6+4) = 2.$$

Việc tính các Δ_{ij} ở trên là không khó khăn nhờ vào trực quan của chu trình. Định lý sau sẽ giúp ta tính nhanh hơn các ước lượng Δ_{ij} này.

8.2. Định lý 6: Cho bài toán vận tải có ma trận cước phí $c = (c_{ij})_{i=1,m, j=1,n}$.

Nếu ta thay ma trận cước phí này bằng ma trận cước phí $c' = (c'_{ij})_{i=1,m, j=1,n}$, $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j$, (lượng hàng ở các kho thu phát vẫn giữ nguyên) thì hai bài toán vận tải này có cùng phương án tối ưu.

Nhờ định lý này khi tính các Δ_{ij} để kiểm tra xem một phương án cực biên có phải là phương án tối ưu hay không, ta sẽ chọn các số r_i, s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Khi đó ta thấy ngay $\Delta_{ij} = -c'_{ij}$.

Nói cách khác, ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Lúc này $\Delta_{ij} = -c'_{ij}$ là của bài toán mới hình thành. Nhưng do định lý 6 thì hai phương án tối ưu là như nhau. (Phương pháp này được gọi là quy không cước phí các ô chọn)

Ví dụ 3: Xét lại ví dụ 1 và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

1 x	5	7	2 x
5	7	4 x	9 x
12	2 x	3 x	6

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + r_1 + s_1 = 0 \\ 2 + r_1 + s_4 = 0 \\ 4 + r_2 + s_3 = 0 \\ 9 + r_2 + s_4 = 0 \\ 2 + r_3 + s_2 = 0 \\ 3 + r_3 + s_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm, tuy nhiên ta có thể chọn một bộ nghiệm là:

$$r_1 = 0, s_1 = -1, s_4 = -2, r_2 = -7, s_3 = 3, r_3 = -6, s_2 = 4$$

Ma trận cước phí của bài toán mới là

0 x	9	10	0 x
-3	4	0 x	0 x
5	0 x	0 x	-2

Khi đó các $\Delta_{ij} = -c'_{ij}$ trong đó c'_{ij} ở bảng trên.

8.3. Định lý 7: Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải với tập các ô chọn là E , và $c'_{ij} = 0, \forall (i, j) \in E$ (nghĩa là sau khi đã quy không cước phí các ô chọn). Ta có

a) Nếu $c'_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \notin E$ thì phương án đã cho là phương án tối ưu.

b) Nếu tồn tại $(i, j) \notin E : c'_{ij} < 0$ thì ta có thể tìm được một phương án mới là $x' = (x'_{ij})$ tốt hơn phương án $x = (x_{ij})$.

Phương án cực biên $x' = (x'_{ij})$ được xây dựng như sau:

- Tìm một ô $(i, j) \in E$ sao cho cước phí $c'_{ij} < 0$ nhỏ nhất.
- Vì E không chứa chu trình (định lý 4). Theo định lý 2 tập các ô $F = E \cup (i, j)$ có chứa một chu trình V duy nhất qua ô (i, j) . Đánh số thứ tự các ô thuộc V , bắt đầu từ ô (i, j) theo một chiều nào đó. Ký hiệu V^L, V^C lần lượt là tập hợp các ô thuộc V có số thứ tự lẻ và số thứ tự chẵn.

- Đặt $x_{i^*j^*} = \min \{x_{ij} : (i, j) \in V^C\}$. Gọi $x_{i^*j^*}$ là lượng hàng điều chỉnh.

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i^*j^*} & (i, j) \in V^L \\ x_{ij} - x_{i^*j^*} & (i, j) \in V^C \\ x_{ij} & (i, j) \in V \end{cases}$$

(Lượng hàng không nằm trong chu trình giữ nguyên. Lượng hàng nằm trong chu trình nhưng có số thứ tự chẵn thì bớt đi một lượng hàng điều chỉnh. Lượng hàng nằm trong chu trình nhưng có số thứ tự lẻ thì cộng thêm một lượng hàng điều chỉnh).

Ví dụ 4: Xét lại ví dụ 1 và phương án cực biên đã biết

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Ta biết đây chưa phải là phương án tối ưu vì còn một $c'_{12} < 0$ (ví dụ 3). Cước phí phải trả là $f = 1.30 + 2.50 + 9.10 + 4.35 + 2.40 + 3.15 = 485$. Ta xây dựng phương án cực biên mới.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

1	5	7	2
x			x
5	7	4	9
		x	x
12	2	3	6
	x	x	

Sau khi đã quy không cước phí các ô chọn

0	9	10	0
x			x
-3	4	0	0
		x	x
5	0	0	-2
	x	x	

Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1). (Đánh dấu * ô (2,1)).

0	9	10	0
x			x
-3	4	0	0
*		x	x
5	0	0	-2
	x	x	

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V, bắt đầu từ ô (2,1). (Số thứ tự trong ngoặc).

0	(4)	9	10	0	(3)
x				x	
-3		4	0	0	
(1)	*		x	x	(2)
5		0	0	3	
		x	x		

$$V^L = \{(2,1); (1,4)\}, V^C = \{(2,4); (1,1)\}.$$

Lượng hàng ở các ô lẻ V^L là $\{x_{21} = 0, x_{14} = 50\}$, ở các ô lẻ V^C là $\{x_{24} = 10, x_{11} = 30\}$. Lượng hàng ở các ô không thuộc chu trình là $x_{32} = 40, x_{33} = 15, x_{23} = 35$.

$$x_{ij}^* = \min \{x_{ij} : (i, j) \in V^C\} = \min \{10, 30\} = 10.$$

Theo công thức x_{ij}' ta có:

$$x_{21}' = 0 + 10 = 10 \quad (\text{Vì hai ô này có số thứ tự lẻ}).$$

$$x_{14}' = 50 + 10 = 60$$

$$x_{24}' = x_{24} - x_{ij}^* = 10 - 10 = 0,$$

$$x_{11}' = x_{11} - x_{ij}^* = 30 - 10 = 20, \quad (\text{Vì hai ô này có số thứ tự chẵn}).$$

$$x_{23}' = x_{23} = 35,$$

$$x_{32}' = x_{32} = 40, \quad (\text{Vì các ô này không thuộc chu trình}).$$

$$x_{33}' = x_{33} = 15,$$

Phương án mới là các số in đậm trong bảng sau (các số nhỏ ở trên là cước phí).

1 20	5	7	2 60
5 10	7	4 35	9
12	2 40	3 15	6

Với phương án này thì cước phí phải trả là:
 $f = 1.20 + 2.60 + 5.10 + 4.35 + 2.40 + 3.15 = 455$. Ta thấy phương án này tốt hơn phương án ban đầu.

8.4. Thuật toán quy không cước phí giải bài toán vận tải:

Để giải bài toán vận tải ta thực hiện một số bước sau đây:

Bước 1: Thành lập một phương án ban đầu, số ô chọn là $m+n-1$, cũng có thể có ô chọn không. (Ta sẽ nói một số cách thành lập phương án ban đầu sau)

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn. Nếu các ô loại có cước phí không âm thì phương án đang xét là phương án tối ưu. Kết thúc thuật toán. Ngược lại có ô loại có cước phí âm ta qua bước 3.

Bước 3: Xây dựng phương án mới như định lý 7.

Bước 4: Quay về bước 2.

* **Cách thành lập phương án ban đầu:** Có nhiều phương pháp thành lập phương án ban đầu, trước tiên ta giới thiệu một phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí.

Phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí thấp nhất. Khi đó sẽ xảy ra hai trường hợp sau:

-Nơi nhận nào đã đủ hàng thì ta xóa cột có nơi nhận đó đi và ghi nhớ lượng hàng thừa ở nơi phát.

-Nơi nào phát hết hàng thì ta xóa dòng có nơi phát đó đi và ghi nhớ lượng hàng thiếu ở nơi nhận.

Sau đó lặp lại: phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí thấp nhất với những ô còn lại trên bảng cước phí vận tải.

Ví dụ 1: Giải bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau:

$j \backslash i$	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Giải:

Bước 1: Thành lập một phương án ban đầu.

Với bảng vận tải như trên ta thấy ô có cước phí thấp nhất là ô (1,1), ô này có cước phí là 1. Vậy lượng hàng có thể phân nhiều nhất vào ô này là 30. Lượng hàng này là từ nơi phát 1 chở đến nơi nhận 1. Ta xóa cột 1 đi. Lúc này nơi nhận 1 đã đủ hàng và nơi phát 1 chỉ còn 50 đơn vị hàng.

$j \backslash i$	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2
45		7	4	9
55		2	3	6

Với các ô còn lại ta thấy có hai ô (1,4) và (3,2) có cước phí bằng 2, từ nơi phát 1 phân đến nơi nhận 4 phân được 50 đơn vị hàng, trong khi đó từ nơi phát 3 phân đến nơi nhận 2 chỉ phân được 40 đơn vị hàng. Ta ưu tiên phân 50 đơn vị hàng từ nơi phát 1 phân đến nơi nhận 4. Khi đó nơi nhận 4 còn thiếu 10 đơn vị hàng, và nơi phát 1 đã hết hàng. Ta xóa dòng 1.

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1			2
45		7	4	9
55		2	3	6

Với các ô còn lại ta thấy ô (3,2) có cước phí bằng 2 là nhỏ nhất. Khi đó từ nơi phát 3 ta phân đến nơi nhận 2 40 đơn vị hàng, nơi nhận 2 đủ hàng, nơi phát 3 còn 15 đơn vị hàng. Ta xóa cột 2.

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1			2
45			4	9
55		2	3	6

Với các ô còn lại ta thấy ô (3,3) có cước phí bằng 3 là nhỏ nhất. Khi đó từ nơi phát 3 ta phân đến nơi nhận 3 15 đơn vị hàng, nơi nhận 3 còn thiếu 35 đơn vị hàng, nơi phát 3 hết hàng. Ta xóa dòng 3.

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1			2
45			4	9
55		2	3	6

Với hai ô còn lại theo thứ tự ưu tiên ta phân 35 đơn vị hàng từ nơi phát 2 đến nơi nhận 3. Khi đó nơi nhận 3 đủ hàng và nơi phát 2 còn 10 đơn vị hàng, ta phân 10 đơn vị hàng này vào nơi nhận 4 và có phương án ban đầu.

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1			2
	30			50
45			4	9
			35	10
55		2	3	
		40	15	

Đây là một phương án mà số ô chọn là $6=3+4-1=m+n-1$. Và đây là một phương án cực biên.

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn. Kế thừa ví dụ 3 để dễ hiểu ta viết lại.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x.

1	5	7	2
x			x
5	7	4	9
		x	x
12	2	3	6
	x	x	

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + r_1 + s_1 = 0 \\ 2 + r_1 + s_4 = 0 \\ 4 + r_2 + s_3 = 0 \\ 9 + r_2 + s_4 = 0 \\ 2 + r_3 + s_2 = 0 \\ 3 + r_3 + s_3 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm, tuy nhiên ta có thể chọn một bộ nghiệm là:
 $r_1 = 0, s_1 = -1, s_4 = -2, r_2 = -7, s_3 = 3, r_3 = -6, s_2 = 4$

Mã trận cước phí của bài toán mới là

0	9	10	0
x			x
-3	4	0	0
		x	x
5	0	0	-2
	x	x	

Chúng tỏ phương án này chưa tối ưu, vì còn ô có cước phí âm.

Bước 3: Xây dựng phương án mới. Kế thừa ví dụ 4 để dễ hiểu ta viết lại. Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (2,4); (1,4); (1,1). (Đánh dấu * ô (2,1))

0	9	10	0
x			x
-3	4	0	0
		x	x
5	0	0	-2
	x	x	

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V, bắt đầu từ ô (2,1). (Số thứ tự trong ngoặc)

0	(4)	9	10	0	(3)
x				x	
-3		4	0	0	
(1)			x	x	(2)
5		0	0	-2	
		x	x		

$$V^L = \{(2,1); (1,4)\}, V^C = \{(2,4); (1,1)\}.$$

Lượng hàng ở các ô lẻ V^L là $\{x_{21} = 0, x_{14} = 50\}$, ở các ô chẵn V^C là $\{x_{24} = 10, x_{11} = 30\}$. Lượng hàng ở các ô không thuộc chu trình là $x_{32} = 40, x_{33} = 15, x_{23} = 35$.

$x_{ij}^* = \min\{x_{ij} : (i,j) \in V^C\} = \min\{10, 30\} = 10$. Theo công thức x'_{ij} ta có

$$\begin{aligned} x'_{21} &= 0 + 10 = 10 \\ x'_{14} &= 50 + 10 = 60 \end{aligned} \quad (\text{Vì hai ô này có số thứ tự lẻ}).$$

$$x'_{24} = x_{24} - x_{i^* j^*} = 10 - 10 = 0,$$

$$x'_{11} = x_{11} - x_{i^* j^*} = 30 - 10 = 20, \quad (\text{Vì hai ô này có số thứ tự chẵn}).$$

$x'_{23} = x_{23} = 35$, $x'_{32} = x_{32} = 40$, $x'_{33} = x_{33} = 15$, (Vì các ô này không thuộc chu trình).

Phương án mới là các số in đậm trong bảng sau (các số nhỏ ở trên là cước phí).

1 20	5	7	2 60
5 10	7	4 35	9
12	2 40	3 15	6

Bước 4: Xem đây là một phương án ban đầu, ta quay lại bước 2, quy không cước phí các ô chọn.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

1 x	5	7	2 x
5 x	7	4 x	9
12	2 x	3 x	6

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0. Lúc này có thể ta làm nhanh hơn.

1 x	5	7	2 x	$r_1=0$
5 x	7	4 x	9	$r_2=-4$
12	2 x	3 x	6	$r_3=-3$
$s_1=$ -1	$s_2=$ 1	$s_3=$ 0	$s_4=$ -2	

Mã trận cước phí của bài toán mới là

0 x	6	7	0 x
0 x	4	0 x	3
8	0	0	1

Bước 2: Quy không cước phí các ô chọn. Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

$I \backslash j$	50	40	70
80	5 x	5	12 x
20	7	9	11 x
60	4	2 x	3 x

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

5 x	5	12 x	$r_1=0$
7	9	11 x	$r_2=1$
4	2 x	3 x	$r_3=9$
$s_1=-5$	$s_2=-11$	$s_3=-12$	

Mã trận cước phí của bài toán mới là

0 x	-6	0 x
3	-1	0 x
8	0 x	0 x

Chúng ta phương án này chưa tối ưu, vì còn ô có cước phí âm.

Bước 3: Xây dựng phương án mới.

Bổ sung ô (1,2) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, được một chu trình V duy nhất (1,2); (1,3); (3,3); (3,2). (Đánh dấu * (1,2))

0 x	-6 (1)*	0 (2) x
3	-1	0 x
8	0	0 (3)

	(4)	x	x
--	-----	---	--------

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V , bắt đầu từ ô (1,2). (Số thứ tự viết trong ngoặc)

$$V^L = \{(1,2); (3,3)\}, V^C = \{(1,3); (3,2)\}.$$

Lượng hàng ở các ô lẻ V^L là $\{x_{12} = 0, x_{33} = 20\}$, ở các ô chẵn V^C là $\{x_{13} = 30, x_{32} = 40\}$.

Lượng hàng ở các ô không thuộc chu trình là $x_{11} = 50, x_{23} = 20$.

$x_{ij} = \min\{x_{ij} : (i,j) \in V^C\} = \min\{40, 30\} = 30$. Theo công thức x'_{ij} từ phương án cũ

5	5	12
50		30
7	9	11
		20
4	2	3
	40	20

Ta hình thành phương án mới

5	5	12
50	30	
7	9	11
		20
4	2	3
	10	50

Bước 4: Xem đây là một phương án ban đầu, ta quay lại bước 2, quy không cước phí các ô chọn.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

5	5	12
x	x	
7	9	11

		x
4	2	3
	x	x

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

5 x	5 x	12	$r_1=0$
7	9	11 x	$r_2=-5$
4	2 x	3 x	$r_3=3$
$s_1=-5$	$s_2=-5$	$s_3=-6$	

Ma trận cước phí của bài toán mới là

0 x	0 x	6
-3	-1	0 x
2	0 x	0 x

Chúng tỏ phương án này chưa tối ưu, vì còn ô có cước phí âm.

Bước 3: Xây dựng phương án mới.

Bổ sung ô (2,1) có cước phí âm nhỏ nhất vào tập các ô chọn E, ta được một chu trình V duy nhất (2,1); (1,1); (1,2); (3,2); (3,3); (2,3). (Đánh dấu * ô (2,1))

0 (2)	0 (3)	6
-3 (1)	-1	0 (6)
2	0	0
	(4)	(5)

Đánh số thứ tự các ô thuộc chu trình V, bắt đầu từ ô (2,1). (Số thứ tự viết trong ngoặc)

$$V^L = \{(2,1); (1,2); (3,3)\}, V^C = \{(1,1); (3,2); (2,3)\}.$$

Lượng hàng ở các ô lẻ V^L là $\{x_{21} = 0, x_{12} = 30, x_{33} = 50\}$, ở các ô chẵn V^C là $\{x_{11} = 50, x_{32} = 10, x_{23} = 20\}$.

Lượng hàng ở các ô không thuộc chu trình không có.

$x_{i^*j^*} = \min\{x_{ij} : (i, j) \in V^C\} = \min\{50, 10, 20\} = 10$. Theo công thức x'_{ij} từ phương án cũ

5	5	12
50	30	
7	9	11
		20
4	2	3
	10	50

Ta hình thành phương án mới

5	5	12
40	40	
7	9	11
10		10
4	2	3
		60

Bước 4: Xem đây là một phương án ban đầu, ta quay lại bước 2, quy không cước phí các ô chọn.

Các ô chọn là các ô có đánh dấu x

5	5	12
x	x	
7	9	11
x		x
4	2	3
		x

Ta cộng vào dòng i số r_i và cột j số s_j sao cho các ô chọn có cước phí bằng 0.

5	5	12	$r_1=0$
x	x		
7	9	11	$r_2=-2$
x		x	
4	2	3	$r_3=6$
		x	

$s_1 =$	$s_2 =$	$s_3 =$	
-5	-5	-9	

Ma trận cước phí của bài toán mới là

0	0	3
x	x	
0	2	0
x		x
5	3	0
		x

Chúng ta phương án này tối ưu. Cước phí nhỏ nhất phải trả là:
 $f = 5.40 + 5.40 + 11.10 + 7.10 + 3.60 = 760$.

Bài tập. (Chương III)

1. Chứng minh định lý 1, §1.
2. Chứng minh định lý 2, §1.
3. Chứng minh rằng tổng số ô trong một chu trình luôn là số chẵn.
4. Chứng minh định lý 1, §2.
5. Chứng minh định lý 2, §2.
6. Chứng minh định lý 3, §2.
7. Chứng minh định lý 4, §2.
8. Chứng minh định lý 5, §2.
9. Chứng minh định lý 6, §2.
10. Chứng minh định lý 7, §2.
11. Giải một số bài toán vận tải cho bởi bảng vận tải sau đây.

a)

$i \backslash j$	50	80	70
75	4	7	12
65	5	8	15
60	6	7	3

b)

$i \backslash j$	50	20	30
------------------	----	----	----

i \ j			
60	6	1	2
40	5	4	3

i \ j	45	55	60
70	5	2	3
90	2	1	4

i \ j	45	55	60	80	30
70	5	2	3	6	10
90	2	1	4	9	4
50	6	5	5	8	6
60	1	12	13	7	7

§2. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT CỦA BÀI TOÁN VẬN TẢI

1. Một số phương pháp thành lập phương án ban đầu:

1.1. Phương pháp góc Tây-Bắc:

Ta ưu tiên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô ở góc Tây-Bắc (hướng Tây-Bắc theo nghĩa bảng đồ) trên bảng vận tải. Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì chúng ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì chúng ta xóa cột chứa nơi nhận đó. Sau đó lặp lại quá trình trên đối với những ô còn lại.

Ví dụ 1: Phương án cực biên của bài toán vận tải sau là thu được từ phương pháp góc Tây-Bắc.

	30	40	50	60
80	1 30	5 40	7 10	2
45	5	7	4 40	9 5
55	12	2	3	6 55

Với phương pháp này cước phí vận chuyển là $f = 835$. Trong khi đó nếu dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí, ta có cước phí vận chuyển chỉ là 485. Do đó phương pháp góc Tây-Bắc chỉ có tính lý thuyết chứ trong thực tế thường người ta ít dùng.

1.2. Phương pháp Fogel.

Phương pháp Fogel cho ta một phương án cực biên khá tốt, theo nghĩa nó rất gần với phương án tối ưu.

i) Trên mỗi dòng và mỗi cột của ma trận cước phí ta tính hiệu số giữa hai giá trị cước phí nhỏ nhất.

ii) Chọn dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất (nếu có nhiều dòng hay cột thỏa điều kiện này thì ta chọn một dòng hay cột nào cũng được)

iii) Phân lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất trên dòng hay cột vừa chọn được. (Khi đó nếu nơi nào đã phát hết hàng thì chúng ta xóa dòng chứa nơi phát đó. Nếu nơi nào nhận đủ hàng thì chúng ta xóa

cột chứa nơi nhận đó. Lúc đó cột (dòng) này, hiệu số sẽ không tính cho bước sau.

iv) Lập lại ba bước nói trên với những ô còn lại cho đến hết. Lúc đó ta thu được phương án cực biên.

Ví dụ 2: Phương án cực biên của bài toán vận tải sau là thu được từ phương pháp Fogel.

	30	40	50	60	Hiệu số
80	1 30	5	7	2 50	1 3 K K
45	5	7	4 45	9	1 3 3 (5)
55	12	2 40	3 5	6 10	1 1 1 3
Hiệu số	(4) K K K	3 3 (5) K	1 1 1 1	4 (4) 3 3	

Với phương pháp Fogel cước phí vận chuyển là $f = 465$. Trong khi đó nếu dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí, ta có cước phí vận chuyển chỉ là 485. Phương pháp này *trong nhiều trường hợp* tốt hơn phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí. Tuy nhiên, người ta hay dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí nhiều hơn vì tính đơn giản mà cũng không kém hiệu quả của nó.

Ngoài ra cũng còn một số phương pháp khác như Fogel cải tiến, Fogel-Larson R.E rất là tốt. Các phương pháp này được thực hiện như sau, xây dựng ma trận cước phí mới từ ma trận cước phí cũ theo công thức

$$c'_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m c_{pj} - \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n c_{ip}$$

$\frac{1}{m} \sum_{p=1}^m c_{pj}$ là trung bình cước phí cột j , $\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n c_{ip}$ là trung bình cước phí

dòng i . Sau đó nếu dùng Fogel cải tiến thì ta dùng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí cho ma trận cước phí mới này. Nếu dùng phương pháp Fogel-Larson R.E thì ta dùng phương pháp Fogel như đã nói trên cũng cho ma trận cước phí mới này.

Ví dụ 3: Xét lại bài toán vận tải đã biết sau

	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

Mã trận cước phí mới được xây dựng theo công thức ở trên là

	30	40	50	60
80	-8.75	-3.41	-1.41	-7.41
45	-7.25	-3.91	-6.91	-2.91
55	0.25	-8.41	-7.41	-5.41

Nếu dùng phương pháp Fogel cải tiến ta có phương án sau

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

Với phương án này cước phí phải trả là 485.

Nếu dùng phương pháp Fogel-Larson R.E ta có phương án sau

	30	40	50	60
80	1 20	5	7	2 60
45	5 10	7	4 35	9
55	12	2	3	6

		40	15	
--	--	----	----	--

Với phương án trên cước phí phải trả là 455. Đây là phương án tối ưu mà bạn đọc đã biết ở phần trước.

2. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát.

Trong thực tế chúng ta hay gặp các bài toán vận tải mà lượng hàng ở các kho (trạm phát) nhiều hơn lượng hàng ở nơi nhận (trạm thu). Tức là

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Để giải quyết vấn đề này ta thêm một nơi nhận giả thứ $n+1$ nhận lượng hàng thừa $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. Cước phí vận chuyển đến nơi này bằng không. Lúc này bài toán là trường hợp cân bằng thu phát, đã biết cách giải.

Ví dụ 4: Giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát cho bởi bảng vận tải sau:

	100	65	95
80	7	5	2
70	3	4	5
150	9	2	7

Lắp thêm nơi nhận giả và ta có bài toán sau:

	100	65	95	40
80	7	5	2	0
70	3	4	5	0
150	9	2	7	0

Ta có phương án cực biên thu được từ phương pháp Fogel và cũng là phương án tối ưu sau. Bạn đọc tự giải.

	100	65	95	40
80	7	5	2	0
70	3	4	5	0
150	9	2	7	0
	30	65	15	40

3. Bài toán vận tải có ô cấm.

Đây là bài toán vận tải mà vì một lý do nào đó có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận nào đó được. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cho cước phí ở ô đó là M , với M là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh. Sau đó chúng ta giải như những bài toán đã trình bày ở trên.

Ví dụ 5: Giải bài toán với hai ô cấm sau.

	100	65	95	40
80	6	5	11	10
70	10		5	7
150	9	8	7	

Giải:

Hai ô cấm chúng ta cho vào đó cước phí là M (M là số dương rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cần so sánh). Một phương án cực biên ban đầu được thành lập bằng phương pháp cực tiểu theo bảng cước phí như sau:

	100	65	95	40
80	6	5	11	10
70	10	M	5	7

			70	
150	9	8	7	M
	85		25	40

Phương án này không thể tối ưu (hiển nhiên). Chúng ta quy 0 cước phí các ô chọn để xây dựng phương án mới tốt hơn. Chú ý số ô chọn là 6 đúng bằng $m+n-1$. Vậy đây là phương án cực biên không suy biến.

Chúng ta chọn các số r_i và s_j sao cho thỏa $c_{ij} + r_i + s_j = 0$, trong đó ô (i, j) là ô chọn. Kết quả trong bảng sau

6	5	11	10	$r_1=3$
x	x			
10	M	5	7	$r_2=2$
		x		
9	8	7	M	$r_3=0$
x		x	x	
$s_1=-9$	$s_2=-8$	$s_3=-7$	$s_4=-M$	

Ma trận cước phí mới là:

0	0	7	13-M
x	x		
3	M-6	0	9-M
		x	
0	0	0	0
x		x	x

Vì M là số dương rất lớn nên $M-6 \geq 0$, $13-M < 0$, $9-M < 0$ và $9-M$ là nhỏ nhất. Do đó bằng thuật toán đã trình bày ở §1 từ phương án cũ

15	65		
		70	*
		x	
85		25	40
		x	x

chúng ta xây dựng được phương án mới

15	65		
----	----	--	--

		30	40
85		65	

Chúng ta sẽ chứng tỏ đây là phương án tối ưu. Thật vậy với các số r_i và s_j chọn được trong bảng sau

6 x	5 x	11	10	$r_1=0$
10	M	5 x	7 x	$r_2=-1$
9 x	8	7 x	M	$r_3=-3$
$s_1=-6$	$s_2=-5$	$s_3=-4$	$s_4=-6$	

ta có ma trận cước phí mới là

0 x	0 x	7	4
3	M-6	0 x	0 x
0 x	0	0 x	M-9

Vì $M-6 \geq 0, M-9 \geq 0$ (do M rất lớn) nên tất cả các ô loại đều có cước phí không âm. Vậy phương án vừa xây dựng trên là tối ưu.

4. Bài toán vận tải cực đại cước phí.

Bài toán vận tải cực đại cước phí là bài toán có dạng

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Bài toán cũng thường viết dưới dạng bảng, và cách giải cũng tương tự bài toán cực tiểu theo bảng cước phí. Rõ hơn ta có

Định lý 7': Giả sử $x = (x_{ij})$ là một phương án cực biên của bài toán vận tải (max) với tập các ô chọn là E , và $c'_{ij} = 0, \forall (i, j) \in E$ (nghĩa là sau khi đã quy không cước phí các ô chọn). Ta có

a) Nếu $c'_{ij} \leq 0, \forall (i, j) \notin E$ thì phương án đã cho là phương án tối ưu.

b) Nếu tồn tại $(i, j) \notin E : c'_{ij} > 0$ thì ta có thể tìm được một phương án mới là $x' = (x'_{ij})$ tốt hơn phương án $x = (x_{ij})$.

Phương án cực biên $x' = (x'_{ij})$ được xây dựng như sau:

- Tìm một ô $(i, j) \notin E$ sao cho cước phí $c'_{ij} > 0$ lớn nhất.

Các bước tiếp theo xây dựng giống như bài toán min, và ta đi đến phương án tối ưu.

Khi xây dựng phương án cực biên ban đầu nên phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất.

Ví dụ 6: Giải bài toán vận tải cực đại cước phí sau:

	70	55	85	60
90	6	5	11	10
80	10	6	5	7
100	9	8	7	4

Giải:

Phương án ban đầu được thành lập bằng phương pháp cực đại theo bảng cước phí như sau (chúng ta phân phối lượng hàng nhiều nhất vào ô có cước phí lớn nhất):

	70	55	85	60
90	6	5	11 85	10 5

80	10 70	6	5	7 10
100	9	8 55	7	4 45

Quy 0 cước phí các ô chọn. Chúng ta chọn các số r_i và s_j sao cho thỏa $c_{ij} + r_i + s_j = 0$, trong đó ô (i, j) là ô chọn. Kết quả trong bảng sau

6	5	11 x	10 x	$r_1=0$
10 x	6	5	7 x	$r_2=3$
9	8 x	7	4 x	$r_3=6$
$s_1=-13$	$s_2=-14$	$s_3=-11$	$s_4=-10$	

Ma trận cước phí mới

-7	-9	0 x	0 x
0 x	-5	-3	0 x
2	0 x	2	0 x

Vì còn hai ô có cước phí dương nên phương án này chưa tối ưu. Do đó bằng thuật toán đã nói trên từ phương án cũ (có cước phí $f = 2375$)

		85	5
70 x			10 x
*	55		45 x

chúng ta xây dựng được phương án mới (có cước phí $f = 2565$), phương án này tốt hơn.

		85	5
25			35

45	85		
----	----	--	--

Bạn đọc có thể kiểm chứng đây là phương án tối ưu.

Bài tập.

1. Giải các bài toán vận tải cực tiểu cước phí sau

a)

	70	55	85	90
70	16	5	6	10
140	3		5	7
90	9	8	7	5

b)

	55	75	85	65
120	8	7	4	11
80	10	6	5	17
100	9	4	6	4

c)

$i \backslash j$	40	70	90
100	5	6	9
45	4		10
55	4	2	5

d)

$i \backslash j$	70	55	65
70	5	8	3

90	7	1	4
60	4	9	13

2. Một nhà máy chế biến thịt, sản xuất ba loại thịt: bò, lợn, cừu, với tổng lượng mỗi ngày là 480 tấn bò; 400 tấn lợn; 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt nấu chín để bán trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bảng sau: (với đơn vị là triệu đồng)

	Tươi	Nấu chín	Nấu chín . ngoài giờ
Bò	8	11	14
Lợn	4	7	12
Cừu	4	9	13

Mục đích của nhà máy là tìm phương án chế biến để làm cực đại lợi nhuận. Hãy tìm phương án chế biến đó.

Chương IV.

BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

1. Bài toán mở đầu:

Một nhà máy cần phân công cho 4 phân xưởng của mình sản xuất một loại máy có 3 chi tiết khác nhau, trong đó mỗi máy cần có đúng 1 chi tiết mỗi loại. Số chi tiết j mà phân xưởng i sản xuất được trong một đơn vị thời gian cho trong bảng sau.

Chi tiết Ph. xưởng	C1	C2	C3
M1	63	240	160
M2	103	61	200
M3	720	360	161
M4	173	120	240

Hãy lập kế hoạch xác định số đơn vị thời gian cần dành cho phân xưởng i làm chi tiết j để tổng số máy sản xuất được lớn nhất.

Mô hình bài toán: Ta xét khoảng thời gian là 1 đơn vị. Gọi x_{ij} là phần thời gian trong 1 đơn vị này mà phân xưởng i sản xuất chi tiết j . Giả sử các phân xưởng hoạt động liên tục, nên ta có:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1, (i = \overline{1, 4}).$$

Số chi tiết các loại được sản xuất trong 1 đơn vị thời gian nói trên là:

$$C1: 63x_{11} + 103x_{21} + 720x_{31} + 173x_{41} = z_1$$

$$C2: 240x_{12} + 61x_{22} + 360x_{32} + 120x_{42} = z_2$$

$$C3: 160x_{13} + 200x_{23} + 161x_{33} + 240x_{43} = z_3.$$

Gọi z là số máy được làm ra trong 1 đơn vị thời gian nói trên. Theo đề bài máy này được cấu tạo từ 1 chi tiết loại 1; 1 chi tiết loại 2; 1 chi tiết loại 3 nên $z \leq z_i, i = \overline{1, 3}$.

Tóm lại ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 f = z &\rightarrow \max \\
 \begin{cases}
 x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1, & (i = \overline{1,4}) \\
 63x_{11} + 103x_{21} + 720x_{31} + 173x_{41} \geq z \\
 240x_{12} + 61x_{22} + 360x_{32} + 120x_{42} \geq z \\
 160x_{13} + 200x_{23} + 161x_{33} + 240x_{43} \geq z \\
 z \geq 0 \\
 x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}; j = \overline{1,3}.
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Một ràng buộc chặt chẽ hơn nữa là z phải là số nguyên. Bài toán Quy hoạch tuyến tính nêu trên được gọi là bài toán sản xuất đồng bộ.

2. Bài toán sản xuất đồng bộ tổng quát:

Một nhà máy cần phân công cho m phân xưởng của mình sản xuất một loại máy có n chi tiết khác nhau, trong đó mỗi máy cần có đúng k_j chi tiết loại j . Gọi a_{ij} là số chi tiết j mà phân xưởng i sản xuất được trong một đơn vị thời gian. Hãy lập kế hoạch xác định số đơn vị thời gian cần dành cho phân xưởng i làm chi tiết j để tổng số máy sản xuất được lớn nhất.

Mô hình bài toán: Tương tự như trên ta xét khoảng thời gian là 1 đơn vị. Gọi x_{ij} là phần thời gian trong 1 đơn vị này mà phân xưởng i sản xuất chi tiết j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Giả sử các phân xưởng hoạt động liên tục, nên ta có:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Số chi tiết loại j được sản xuất trong 1 đơn vị thời gian nói trên là:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = z_j$$

Gọi z là số máy được làm ra trong 1 đơn vị thời gian nói trên. Theo đề bài máy này được cấu tạo từ k_j chi tiết loại j nên $z \leq k_j z_j, j = \overline{1, n}$.

Tóm lại ta có bài toán Quy hoạch tuyến tính sau là bài toán sản xuất đồng bộ tổng quát.

$$\begin{aligned} f = z &\rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ k_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \right) \geq z, \quad j = \overline{1, n} \\ z \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Trong giáo trình chỉ xét cho trường hợp như ví dụ mở đầu đã nêu tức là $k_j = 1$ với mọi j .

Như đã nói ở trên thì z phải là số nguyên. Tuy nhiên nếu số lượng các máy làm ra rất lớn, mà một hay hai cái máy không ảnh hưởng đến lợi nhuận của nhà máy, thì chúng ta có thể bỏ qua điều kiện này. Ngược lại thì không thể.

Trong giáo trình chúng ta bỏ qua điều kiện z là số nguyên.

3. Tính chất của bài toán sản xuất đồng bộ:

Bài toán sản xuất đồng bộ là bài toán Quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu.

Thật vậy, chúng ta có thể nhận thấy đây là bài toán Quy hoạch tuyến tính có tập phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.

§2. THUẬT TOÁN ĐIỀU CHỈNH NHÂN TỬ

1. Giới thiệu chung.

Xét bài toán sản xuất đồng bộ dạng

$$f = z \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq z, (j = \overline{1, n}) \\ z \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Bài toán đôn ngẫu của bài toán này là bài toán

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min \\ &\begin{cases} u_i - a_{ij} v_j \geq 0, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \\ \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 \\ v_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Theo định lý độ lệch bù, phương án $(x_{ij}, z); i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc khi và chỉ khi tồn tại các số $(u_i, v_j); i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ sao cho:

$$\begin{cases} v_j \left(z - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \right) = 0, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} (u_i - a_{ij} v_j) = 0, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \\ z \left(\sum_{j=1}^n v_j - 1 \right) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này không đơn giản, bởi vì số lượng phương trình của hệ rất nhiều. Chúng ta có thuật toán sau đây khắc phục những khó khăn đó.

2. Thuật toán điều chỉnh nhân tử.

Thuật toán này có một số bước sau đây.

Bước 1. Tìm hệ thống nhân tử (u_i, v_j) .

Trước tiên chúng ta xác định (i, j) có a_{ij} lớn nhất. (i, j) được lấy làm ô chọn và $v_j = 1, u_i = a_{ij}$.

Các nhân tử ở dòng và cột khác được xác định như sau:

Trên dòng đã có nhân tử, ta tìm ô có năng suất lớn nhất mà nằm trên cột j chưa có nhân tử. Chúng ta tính nhân tử trên cột j này theo quy tắc:

$$v_j = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij}}, \text{ với mọi dòng } i \text{ đã có nhân tử} \right\}.$$

Ô tương ứng với nhân tử v_j vừa tìm được lấy làm ô chọn.

Trên cột đã có nhân tử, ta tìm ô có năng suất lớn nhất mà nằm trên dòng i chưa có nhân tử. Chúng ta tính nhân tử cho dòng i này theo quy tắc:

$$u_i = \max \{ a_{ij} \cdot v_j, \text{ với mọi cột } j \text{ đã có nhân tử} \}.$$

Ô tương ứng với nhân tử u_i vừa tìm được lấy làm ô chọn.

Quá trình trên được tiến hành cho đến khi tìm được tất cả các nhân tử dòng và cột.

Bước 2. Tìm (x_{ij}) và z tương ứng.

(x_{ij}) và z phải thỏa mãn hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = z, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in L \end{cases}$$

trong đó L là tập hợp những ô loại.

Hệ thống (x_{ij}) , z và (u_i, v_j) cho ta biểu thức $x_{ij}(u_i - a_{ij}v_j) = 0, \forall(i, j)$. Từ đây suy ra

$$z = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j}.$$

x_{ij} ở các ô chọn được xác định như sau:

Nếu (i, j) là ô chọn duy nhất nằm trên dòng i (gọi là ô treo ở dòng i) thì $x_{ij} = 1$.

Nếu (i, j) là ô chọn duy nhất nằm trên cột j (gọi là ô treo ở cột j) thì $x_{ij} = \frac{z}{a_{ij}}$.

Các x_{ij} còn lại được xác định dựa vào các giá trị đã biết và hệ thống ba phương trình nêu từ đầu.

Bước 3. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Nếu $x_{ij}, \forall(i, j)$ thì (x_{ij}, z) là phương án tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ.

Nếu không phải như vậy chúng ta chuyển sang bước 4 sau đây.

Bước 4. Điều chỉnh nhân tử.

$x_{i_0 j_0} = \min \{x_{ij} / x_{ij} < 0\}$. Ô (i_0, j_0) sẽ là ô loại trong bảng mới.

Giữ nguyên nhân tử cột j_0 , nghĩa là đặt $v'_{j_0} = v_{j_0}$. Sửa nhân tử dòng i_0 bằng cách nhân với hệ số λ , nghĩa là $u'_{i_0} = \lambda u_{i_0}$.

Các nhân tử dòng và cột khác được điều chỉnh như sau:

Trên dòng i đã sửa nhân tử, nếu có ô chọn (i, j) nằm trên cột j chưa sửa nhân tử thì ta sửa nhân tử cho cột j này, nghĩa là $v'_j = \lambda v_j$.

Trên cột j đã sửa nhân tử, nếu có ô chọn (i, j) nằm trên dòng i chưa sửa nhân tử thì ta sửa nhân tử cho dòng i này, nghĩa là $u'_i = \lambda u_i$.

Quá trình trên được thực hiện cho đến khi không còn điều kiện để chỉnh sửa nữa. Khi đó các nhân tử dòng và các nhân tử cột được chia thành hai nhóm. Nhóm sửa nhân tử và nhóm không sửa nhân tử.

Ta xác định tập các ô $\{(i, j) / \text{dòng } i \text{ không sửa và cột } j \text{ sửa}\}$.

Tính hệ số điều chỉnh $\lambda = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij} v_j} / \forall (i, j) \in X \right\}$. Giả sử λ

được chọn ứng với ô (k, l) , thì ô này sẽ là ô chọn trong bảng mới. Thay λ bởi giá trị cụ thể vừa tìm được ở trên chúng ta sẽ có hệ thống nhân tử mới.

Hệ thống ô chọn mới, bằng hệ thống ô chọn cũ và ô (k, l) , bỏ đi ô (i_0, j_0) .

Bước 5. Quay lại bước 2.

Bước 6. Quay lại bước 3.

Quá trình này sẽ dừng sau một số hữu hạn bước, và ta có phương án tối ưu của bài toán sản xuất đồng bộ.

Ví dụ 1: Giải bài toán sản xuất đồng bộ với bảng sau đây

Chi tiết Ph. xưởng	C1	C2	C3
M1	25	75	90
M2	51	85	255

Giải:

25	75	90
	x	

51	85	255
x	x	x

Bước 1. Tìm hệ thống nhân tử (u_i, v_j) .

Trước tiên chúng ta xác định ô (i, j) có a_{ij} lớn nhất. Ô (i, j) được lấy làm ô chọn và $v_j = 1, u_i = a_{ij}$. Đó là ô $(2, 3)$. Vậy $v_3 = 1, u_2 = 255$.

Các nhân tử ở dòng và cột khác được xác định như sau:

Trên dòng 2 đã có nhân tử, ta tìm ô có năng suất lớn nhất mà nằm trên cột j chưa có nhân tử. Đó là cột 2. Chúng ta tính nhân tử trên cột 2 này theo quy tắc:

$$v_2 = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{i2}}, \text{ với mọi dòng } i \text{ đã có nhân tử} \right\} = \min \left\{ \frac{255}{85} \right\} = 3.$$

Min đạt được ở dòng thứ 2 nên ô $(2, 2)$ được lấy làm ô chọn.

Trên cột 2 đã có nhân tử, ta tìm ô có năng suất lớn nhất mà nằm trên dòng i chưa có nhân tử. Đó là dòng 1. Chúng ta tính nhân tử cho dòng 1 này theo quy tắc:

$$\begin{aligned} u_1 &= \max \{ a_{ij} \cdot v_j, \text{ với mọi cột } j \text{ đã có nhân tử} \} \\ &= \max \{ 75 \times 3; 90 \times 1 \} = 75 \times 3 = 225. \end{aligned}$$

Ô tương ứng với nhân tử u_1 vừa tìm được lấy làm ô chọn. Đó là ô $(1, 2)$.

Trên dòng 1 đã có nhân tử ta chọn ô có năng suất lớn nhất nằm trên cột chưa có nhân tử. Đó là cột 1. Chúng ta tính nhân tử trên cột 1 này theo quy tắc:

$$v_1 = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{i1}}, \text{ với mọi dòng } i \text{ đã có nhân tử} \right\} = \min \left\{ \frac{225}{25}, \frac{255}{51} \right\} = \frac{255}{51} = 5.$$

Ô $(2, 1)$ là ô chọn.

Vậy ta đã có các nhân tử $u_1 = 225, u_2 = 255$; và $v_1 = 5, v_2 = 3, v_3 = 1$.

Bước 2. Tìm (x_{ij}) và z tương ứng.

(x_{ij}) và z phải thỏa mãn hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, i = \overline{1,2} \\ \sum_{i=1}^2 a_{ij}x_{ij} = z, j = \overline{1,3} \\ x_{ij} = 0, \forall (i,j) \in L \end{cases}$$

trong đó L là tập hợp những ô loại.

Ta có

$$z = \frac{\sum_{i=1}^2 u_i}{\sum_{j=1}^3 v_j} = \frac{225 + 255}{1 + 3 + 5} = \frac{160}{3}.$$

Một số x_{ij} ở các ô chọn được xác định như sau:

Ta có ô $(1,2)$ là ô chọn duy nhất nằm trên dòng 1 (gọi là ô treo ở dòng 1). Vậy $x_{12} = 1$.

Ta có ô $(2,1)$ là ô chọn duy nhất nằm trên cột 1 (gọi là ô treo ở cột 1). Vậy $x_{21} = \frac{z}{a_{21}} = \left(\frac{160}{3}\right) : (51) = \frac{160}{153}$.

Ta có ô $(2,3)$ là ô chọn duy nhất nằm trên cột 3 (gọi là ô treo ở cột 3). Vậy $x_{23} = \frac{z}{a_{23}} = \left(\frac{160}{3}\right) : (255) = \frac{32}{153}$.

Các x_{ij} còn lại được tìm từ hệ phương trình nêu trong bước 2. Cụ thể $x_{11} = 0$; $x_{13} = 0$ vì đây là hai ô loại. x_{22} có thể được tìm từ một trong hai phương trình sau $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$ hoặc $75 \times 1 + 85 \times x_{22} = z = \frac{160}{3}$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $x_{22} = \frac{-13}{51} < 0$.

Bước 3. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Ta có $x_{22} = \frac{-13}{51} < 0$. Điều này chứng tỏ phương án mà chúng ta vừa tìm ra được không phải là phương án tối ưu.

Bước 4. Điều chỉnh nhân tử.

$x_{i_0 j_0} = \min \{x_{ij} / x_{ij} < 0\} = \min \left\{ \frac{-13}{51} \right\} = \frac{-13}{51} = x_{22}$. Ô (2,2) sẽ là ô loại trong bảng mới.

Giữ nguyên nhân tử cột $j_0 = 2$, nghĩa là đặt $v'_2 = v_2 = 3$ ($v'_{j_0} = v_{j_0}$). Sửa nhân tử dòng $i_0 = 2$ bằng cách nhân với hệ số λ , nghĩa là $u'_2 = \lambda u_2 = 255\lambda$ ($u'_{i_0} = \lambda u_{i_0}$).

Các nhân tử dòng và cột khác được điều chỉnh như sau:

Trên dòng $i=2$ đã sửa nhân tử, ta có ô chọn (2,1) nằm trên cột $j=1$ chưa sửa nhân tử, ta sửa nhân tử cho cột $j=1$ này, nghĩa là $v'_1 = \lambda v_1 = 5\lambda$. Và ta cũng có ô chọn (2,3) nằm trên cột $j=3$ chưa sửa nhân tử, ta sửa nhân tử cho cột $j=3$ này, nghĩa là $v'_3 = \lambda v_3 = 1\lambda$.

Trên cột j đã sửa nhân tử, nếu có ô chọn (i, j) nằm trên dòng i chưa sửa nhân tử thì ta sửa nhân tử cho dòng i này, nghĩa là $u'_i = \lambda u_i$. Ở đây không có trường hợp này.

Đến đây không còn điều kiện để chỉnh sửa nữa. Lúc này các nhân tử dòng và các nhân tử cột được chia thành hai nhóm. Nhóm sửa nhân tử và nhóm không sửa nhân tử. Dòng 1 không sửa nhân tử; dòng 2 sửa nhân tử. Cột 1 và cột 3 sửa nhân tử; cột 2 không sửa.

Ta xác định tập các ô $\{(i, j) / \text{dòng } i \text{ không sửa và cột } j \text{ sửa}\} = X$. Các ô thỏa điều kiện này là $\{(1,1); (1,3)\} = X$.

$$\begin{aligned} \text{Tính hệ số điều chỉnh } \lambda &= \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij}v_j} / \forall (i, j) \in X \right\} = \\ \min \left\{ \frac{u_1}{a_{11}v_1}; \frac{u_1}{a_{13}v_3} \right\} &= \min \left\{ \frac{225}{25 \times 5}; \frac{225}{90 \times 1} \right\} = \frac{225}{25 \times 5} = \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Ta có λ được chọn ứng với ô $(k, l) = (1, 1)$. Vậy ô này sẽ là ô chọn trong bảng mới.

Thay $\lambda = \frac{9}{5}$ ta có hệ thống nhân tử mới là: $u'_1 = u_1 = 225$ (dòng 1 không sửa nhân tử); $u'_2 = \lambda u_1 = \frac{9}{5} \cdot 255 = 459$, và $v'_1 = \lambda v_1 = \frac{9}{5} \cdot 5 = 9$; $v'_2 = v_2 = 3$ (cột 2 không sửa nhân tử); $v'_3 = \lambda v_3 = \frac{9}{5} \cdot 1 = \frac{9}{5}$.

Hệ thống ô chọn mới, bằng hệ thống ô chọn cũ; và ô $(k, l) = (1, 1)$ bỏ đi ô $(i_0, j_0) = (2, 2)$. Vậy hệ thống ô chọn mới đánh dấu trong bảng sau:

25 x	75 x	90
51 x	85	255 x

Bước 5. Quay lại bước 2.

Tìm (x_{ij}) và z tương ứng.

(x_{ij}) và z phải thỏa mãn hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, i = \overline{1, 2} \\ \sum_{i=1}^2 a_{ij} x_{ij} = z, j = \overline{1, 3} \\ x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in L \end{cases}$$

trong đó L là tập hợp những ô loại.

Ta có

$$z = \frac{\sum_{i=1}^2 u'_i}{\sum_{j=1}^3 v'_j} = \frac{225 + 459}{9 + 3 + \frac{9}{5}} = \frac{1140}{23}$$

Ta có ô (1,2) là ô chọn duy nhất nằm trên cột 2 (gọi là ô treo ở cột

2). Vậy $x_{12} = \frac{z}{a_{12}} = \left(\frac{1140}{23} \right) : (75) = \frac{76}{115}$.

Ta có ô (2,3) là ô chọn duy nhất nằm trên cột 3 (gọi là ô treo ở cột

3). Vậy $x_{23} = \frac{z}{a_{23}} = \left(\frac{1140}{23} \right) : (255) = \frac{76}{391}$.

Các x_{ij} còn lại được tìm từ hệ phương trình nêu trong bước 2. Cụ thể $x_{13} = 0$; $x_{22} = 0$ vì đây là hai ô loại. x_{11} và x_{21} có thể từ phương trình sau

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \Leftrightarrow x_{11} + \frac{76}{115} + 0 = 1 \Leftrightarrow x_{11} = 1 - \frac{76}{115} = \frac{39}{115}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \Leftrightarrow x_{21} + 0 + \frac{76}{391} = 1 \Leftrightarrow x_{21} = 1 - \frac{76}{391} = \frac{315}{391}$$

Bước 6. Quay về bước 3. Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Đến đây chúng ta thấy $x_{ij} \geq 0, \forall (i, j)$. Phương án tìm được ở bước 5

là phương án tối ưu. Nghĩa là cần phân cho phân xưởng M1, $x_{11} = \frac{39}{115}$ đơn

vị thời gian sản xuất chi tiết C1; $x_{12} = \frac{76}{115}$ đơn vị thời gian sản xuất chi tiết

C2; không sản xuất chi tiết C3. Phân cho phân xưởng M2 $x_{21} = \frac{315}{391}$ đơn vị

thời gian sản xuất chi tiết C1; $x_{23} = \frac{76}{391}$ đơn vị thời gian sản xuất chi tiết

C3; không sản xuất chi tiết C2. Khi đó số máy sản xuất ra được là

$$z = \frac{1140}{23} \approx 49 \text{ cái.}$$

Bài tập.

1. Giải bài toán trong ví dụ mở đầu.

2. Một nhà máy cần phân công cho 2 phân xưởng của mình sản xuất một loại máy có 2 chi tiết khác nhau, trong đó mỗi máy cần có đúng 1 chi tiết loại 1, và hai chi tiết loại 2. Số chi tiết j mà phân xưởng i sản xuất được trong một đơn vị thời gian cho trong bảng sau:

PX \ CT	C1	C2
	C1	C2
M1	75	150
M2	95	175

Hãy lập kế hoạch xác định số đơn vị thời gian cần dành cho phân xưởng i làm chi tiết j để tổng số máy sản xuất được lớn nhất. (Bài toán có thể giải bằng phương pháp đơn hình).

3. Giải bài toán sản xuất đồng bộ với bảng số liệu sau:

PX \ CT	C1	C2	C3	C4
M1	0	6	6	12
M2	4	0	8	8
M3	3	8	8	4
M4	6	5	10	20

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phí Mạnh Ban: Quy hoạch tuyến tính, NXB Giáo dục, năm 1999.
2. Đặng Hân: Giáo trình Quy hoạch tuyến tính, Trường ĐHKT Tp HCM, năm 1996.
3. Phan Quốc Khánh – Trần Huệ Nương: Quy hoạch tuyến tính, NXB Giáo dục, năm 2000.
4. Nguyễn Đức Nghĩa: Quy hoạch tuyến tính, NXB Giáo dục, năm 1997.
5. Bùi Minh Trí: Quy hoạch Toán học, NXB KHKT, năm 1999.
6. Nguyễn Thành Cả: Giáo trình Quy hoạch tuyến tính, Trường ĐHKT Tp HCM, năm 2002.
7. Ye.S.Venttsel: Elements of game theory, Mir publishers, Moscow.
8. Nguyễn Phú Vinh: Các Giáo trình Toán Cao Cấp và Giáo trình Xác suất thống kê, ĐHCN T.p HCM, các năm 2004, 2008.
9. Nguyễn Phú Vinh, Nguyễn Đình Tùng: Thuật toán đơn hình giải bài toán Quy hoạch tuyến tính, Hội nghị Khoa học toàn trường ĐHCN T.p HCM, năm 2004.